



Programme de colles 02

Les nombres complexes

Quinzaine du 01 au 14 octobre

Les champs précédés d'un astérisque concerne les points qui ne seront pratiqués en TD que lundi 01/10 (mais le cours a été fait).

Nombres complexes

1. Nombres complexes, propriétés élémentaires, partie réelle, imaginaire.
2. Représentation graphique, plan complexe, affixe d'un point, d'un vecteur.
3. Conjugaison, propriétés, interprétation graphique. Caractérisation des réels, des imaginaires purs par la conjugaison.
4. Module d'un complexe, propriétés, $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$, $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$.
5. Module au carré d'une somme, inégalité triangulaire (inférieure et supérieure).
6. Complexes de module 1, stabilité par produit, inverse/conjugué.
7. Définition de l'exponentielle complexe, propriétés. Formules d'Euler, formule de Moivre. Les étudiants doivent être capable de factoriser une somme d'exponentiels par l'angle moitié.
8. Argument d'un nombre complexe, forme polaire/trigonométrique, « unicité » de l'écriture. Propriétés de l'argument. Interprétation graphique avec l'angle entre deux vecteurs.

Equations algébriques complexes

1. Racines carrées d'un complexe, existence d'exactly deux racines pour tout complexe non nul. Détermination direct par la forme polaire. Les étudiants doivent être capables de trouver les racines carrées à partir de la forme algébrique par résolution d'un système.
2. *Equations complexes du second degré. Discriminant complexe et expression des racines. Relations racines-coefficients : $s = z_1 + z_2$ et $p = z_1 z_2$ avec $z^2 - sz + p$.
3. *Racines n -ièmes de l'unité. Stabilité par produit et inverse/conjugué. Expression des racines n -ièmes. Somme des racines et factorisation de $z^n - 1$.
4. *Racines n -ièmes d'un complexe z . Expression à partir de la forme polaire de z . Détermination des racines n -ièmes de z à partir d'une.

Applications géométriques

1. *Caractérisation par les affixes de la colinéarité/alignement, de l'orthogonalité.
2. *Translation, rotation, homothétie. Définitions géométriques et applications complexes associées. Similitude directe, recherche du point fixe et décomposition en une rotation et en une similitude dans le cas où ce n'est pas une translation.

Questions de cours

1. Démonstration de l'inégalité triangulaire.
2. Démonstration de la formule des racines d'une équation du second degré .
3. Démonstration de l'écriture polaire des racines n -ièmes de l'unité.
4. Enoncé et démonstration du fait que ω est une racine n -ième de l'unité si et seulement si la somme de ses puissances jusqu'à $n - 1$ vaut 0.
5. Formulation complexe d'une rotation de centre O et démonstration.