



Programme de colles 05

Primitives, intégrales et équations différentielles

Quinzaine du 26 novembre au 09 décembre

Fonctions circulaires réciproques

1. Fonctions arccos, arcsin et arctan. Définition, continuité, monotonie, dérivabilité, calcul de la dérivée, valeurs en des points remarquables, tableaux de variation, graphes, tangentes en 0, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x}$.
2. Quelques formules remarquables : $\cos(\arcsin(x)) = \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$, $\arccos(-x) + \arccos(x) = \pi$, $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$, $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pm \frac{\pi}{2}$

Calculs de primitives et d'intégrales

1. Complément sur les fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C} : définition de la dérivée d'une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C} . La dérivée de $t \mapsto e^{\alpha(t)}$ où $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ doit être connue.
2. Définition d'une primitive. En cas d'existence, description de l'ensemble des primitives.
3. Définition des fonctions de classe \mathcal{C}^1 .
4. Existence d'une primitive F de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} dans le cas continu (sans démonstration) et unicité sous condition $F(A) = a$.
5. Théorème fondamental de l'analyse $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$.
6. Propriétés de l'intégrale : inversion des bornes, linéarité, relation de Chasles, inégalité triangulaire. Dans le cas des fonctions à valeurs dans \mathbb{R} : croissance, positivité et séparation (intégrale nulle d'une fonction continue et positive).
7. Intégrations par parties de deux fonctions \mathcal{C}^1 .
8. Formule de changement de variable. Les étudiants doivent être capables d'effectuer un changement de variable de façon technique dans un premier temps puis d'utiliser rigoureusement la formule en définissant φ et f dans un second temps.
9. Primitives usuelles.
10. Intégration de fractions rationnelles dans des cas assez simples. La décomposition en éléments simples a été évoquée mais rapidement (hors programme).

Equations différentielles linéaires d'ordre 1

1. Définition. Equation homogène associée.
2. Propriété de stabilité par combinaison linéaire de l'espace homogène.
3. Résolution de l'équation homogène.
4. Ensemble des solutions de l'équation non homogène à l'aide d'une solution.
5. Principe de superposition.
6. Recherche d'une solution particulière dans le cas polynomial, exponentiel, polynôme-exponentiel, trigonométrique.
7. Méthode de variation de la constante.
8. Problème de Cauchy d'une équation différentielle d'ordre 1, existence et unicité.
9. Problème de raccord simple.

Questions de cours

1. Enoncé et démonstration de la dérivation de la fonction arcsin.
2. Enoncé et démonstration de la formule de changement de variables.
3. Enoncé et démonstration de l'ensemble des solutions de l'équation homogène.
4. Enoncé et démonstration de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle d'ordre 1 à l'aide des solutions de l'équation homogène et d'une solution particulière.