Programme de colles 07
Systèmes linéaires, matrices, ensembles et applications

Quinzaine du 07 au 20 Janvier

Systèmes linéaires et matrices

1. **Systèmes linéaires :** Définition d'un système linéaire, homogène, compatible, incompatible.
2. Opérations élémentaires en lignes.
3. Système échelonné, pivots, inconnues principales, secondaires/paramètres. Rang d'un système.
4. Méthode du pivot de Gauss et résolution d'un système échelonné.
5. Nombre de solutions. Ensemble solution sous forme ensembliste et vectoriel $\mathrm{Vect}(\dots)$ (les espaces vectoriels n'ont pas encore été traités).
6. Interprétation géométrique d'un système en dimension 2 ou 3 (intersection de droites ou de plans).
7. **Matrices :** Version matricielle d'un système linéaire. Matrice augmentée.
8. Définition des matrices $E_{kl} = (\delta_{ik}\delta_{jl})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;]\!]}$, matrices élémentaires (transposition, dilatation, transvection) et correspondance avec les opérations élémentaires.
9. Matrice échelonnée en lignes, matrice échelonnée réduite en lignes.
10. Rang d'une matrice. Lien entre le rang de la matrice et de la matrice augmentée avec le nombre de solutions.
11. Caractérisation de l'inversibilité :

Théorème V.1

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) A est inversible
(b) $A \underset{L}{\sim} I_n$
(c) $\mathrm{rg}(A) = n$
(d) Le système $AX = 0$ n'admet que la solution nulle
(e) Pour tout vecteur colonne $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet une unique solution
(f) Pour tout vecteur colonne $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet au moins une solution

12. Calcul de l'inverse par le calcul de la réduite.
13. Bref complément aux opérations en colonnes.

Ensembles et applications

1. **Ensembles :** A partir de l'appartenance, définition de l'inclusion et de l'égalité de deux ensembles. L'inclusion est réflexive, transitive et antisymétrique.
2. Définition d'une partie d'un ensemble E et de l'ensemble des parties de E, noté $\mathscr{P}(E)$.
3. Intersection et union : définition, commutativité, associativité. Ensembles disjoints.
4. Complémentaire $C_E(A)$, différence de deux ensembles. Propriétés (lois de Morgan en particulier).
5. Produit cartésien d'ensembles.
6. **Applications :** définition, image, antécédent, graphe.
7. Application identité, fonctions indicatrices.
8. Composition, restriction, prolongement.
9. Image directe, image réciproque. Image directe et réciproque de l'union, de l'intersection.
10. Injection, surjection, bijection.
11. Relation binaire. Relation réflexive, symétrique, transitive, antisymétrique.
12. Relation d'équivalence et classe d'équivalence.

Questions de cours

1. Soit $\mathcal{R}$ est relation d'équivalence. Démontrer que $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow Cl(x) = Cl(y) \Leftrightarrow Cl(x) \cap Cl(y) \neq \emptyset$.
2. Démontrer une ou plusieurs des assertions suivantes :
   1. $f^{-1}(A\cup B) = f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$
   2. $f^{-1}(A\cap B) = f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$
   3. $A \subset f^{-1}(f(A))$
   4. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
   5. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
   6. $f(f^{-1}(B)) \subset B$
   7. $f^{-1}(C_F(B)) = C_E(f^{-1}(B))$
3. Enoncer le théorème reliant le nombre de solutions d'un système linaire au rang des matrices associées.

Théorème IV.4

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et (S) un système à n équations et p inconnues. Soit $(\, A \mid B \,)$ sa matrice augmentée.

(a) Le système (S) est compatible si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\, A \mid B \,)$.

(b) Le système (S) admet une unique solution si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\, A \mid B \,) = p$.

(c) Le système (S) admet une infinité de solution si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B)$ et $\mathrm{rg}(A) < p$. Dans ce cas E_0, l'ensemble des solutions du système homogène (S_0) associé à (S) est engendré par $p - \mathrm{rg}(A)$ vecteurs.

(d) Le nombre d'inconnues secondaires de (S) est $p - \mathrm{rg}(A)$.

4. Calculer le rang d'une matrice/système ou le système/matrice échelonnée/échelonnée réduite ou résoudre un système ou inverser une matrice par la méthode du pivot sur un exemple simple.