Révisions d'hiver 01

Pour lundi 25/02

Polynômes et espaces vectoriels

Exercice I (S'entraîner)

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on pose

$$E(a) = \{ P \in \mathbb{R}[X] \mid X - a \text{ divise } P \}.$$

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $E(a)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
2. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a \neq b$.
   (a) Montrer que $1 \in \operatorname{Vect}(X - a, X - b)$.
   (b) En déduire que $\mathbb{R}[X] = E(a) + E(b)$.
   (c) Les sous-espaces vectoriels $E(a)$ et $E(b)$ sont-ils supplémentaires ?

Solution de l'exercice I

1. Soit $a \in \mathbb{R}$.
   - L'ensemble $E(a) \subseteq \mathbb{R}[X]$ par définition.
   - Le polynôme $X - a$ divise bien le polynôme nul ($0 = 0 \times (X - a)$) donc $0_{\mathbb{R}[X]} \in E(a)$ (qui est donc non vide).
   - Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(P, Q) \in E(a)$. On pose $A = \lambda P + \mu Q$. Montrons que $A \in E(a)$. Par définition de $E(a)$, il existe $R \in \mathbb{R}[X]$ et $S \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = (X - a)R$ et $Q = (X - a)S$. Par conséquent,
   $$A = \lambda P + \mu Q = \lambda(X - a)R + \mu(X - a)S = (X - a)(\lambda R + \mu S).$$
   Dès lors, $X - a$ divise A et donc $A \in E(a)$. Donc $E(a)$ est stable par combinaison linéaire.

   Conclusion, $\boxed{E(a) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}[X].}$
2. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a \neq b$.
   (a) On a les équivalences suivantes :
   $$\begin{aligned}
   1 \in \operatorname{Vect}(X - a, X - b) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad 1 = \lambda (X - a) + \mu (X - b) \\
   &\Leftrightarrow \quad \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad 1 = \lambda (X - a) + \mu (X - b) \\
   &\Leftrightarrow \quad \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad 1 = (\lambda + \mu) X - (\lambda a + \mu b).
   \end{aligned}$$
   Par unicité des coefficients d'un polynôme,
   $$\begin{aligned}
   1 \in \operatorname{Vect}(X - a, X - b) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda a + \mu b = -1 \end{cases} \\
   &\Leftrightarrow \quad \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} \mu = -\lambda \\ \lambda a - \lambda b = -1 \end{cases} \\
   &\Leftrightarrow \quad \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} \lambda = \frac{1}{b-a} & \text{car par hypothèse } a \neq b \\ \mu = -\lambda = -\frac{1}{b-a} \end{cases}
   \end{aligned}$$
   La dernière assertion étant toujours vraie, on en déduit que $\boxed{1 \in \operatorname{Vect}(X - a, X - b)}$ et plus précisément :
   $$\boxed{1 = \frac{1}{b-a}(X - a) - \frac{1}{b-a}(X - b).} \tag{1}$$
   (b) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. D'après (1), on a
   $$P = \underbrace{(X - a)\frac{1}{b-a}P}_{=P_1} - \underbrace{(X - b)\frac{1}{b-a}P}_{=P_2}.$$
   Puisque $X - a$ divise le polynôme P_1, on en déduit que $P_1 \in E(a)$. De même, $P_2 \in E(b)$. Ainsi, on a $P = P_1 + P_2$ avec $P_1 \in E(a)$ et $P_2 \in E(b)$. Donc $P \in E(a) + E(b)$. Donc $\mathbb{R}[X] \subseteq E(a) + E(b)$. Or $E(a)$ et $E(b)$ sont deux sous-ensembles de $\mathbb{R}[X]$ donc $E(a) + E(b)$ est aussi un sous-ensemble de $\mathbb{R}[X]$ (et même mieux est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ car $E(a)$ et $E(b)$ le sont d'après la question 1). Donc $E(a) + E(b) \subseteq \mathbb{R}[X]$. Finalement, $\boxed{\mathbb{R}[X] = E(a) + E(b)}$.

   (c) Les espaces vectoriels $E(a)$ et $E(b)$ ne sont pas supplémentaires car ils ne sont pas en somme directe car leur intersection n'est pas réduite au vecteur nul. En effet, posons $P = (X - a)(X - b) \in \mathbb{R}[X]$. Il est clair que $P \in E(a)$, $P \in E(b)$ donc $P \in E(a) \cap E(b)$ et pourtant $P \neq 0$. Donc $E(a) \cap E(b) \neq \{0\}$. Conclusion $\boxed{E(a) \text{ et } E(b) \text{ ne sont pas en somme directe et ne sont donc pas supplémentaires}}$.