Révisions d'hiver 02

Pour Mardi 26/02

équations différentielles

Exercice I (S'entraîner)

Résoudre sur $]0;+\infty[$ l'équation différentielle suivante d'inconnue y une fonction dérivable sur $]0;+\infty[$:

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad xy'(x) - \left(2x^2 - 1\right) y(x) = x. \tag{E}$$

Solution de l'exercice I

Commençons par écrire l'équation « résolue » en y'. Sur $]0;+\infty$, on a

$$(E) \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall x \in]0;+\infty[, \quad y'(x) - \left(2x - \frac{1}{x}\right) y(x) = 1 \qquad \text{car } x \neq 0.$$

Considérons (E_0) l'équation homogène associée :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad y'(x) - \left(2x - \frac{1}{x}\right) y(x) = 0. \tag{E_0}$$

La fonction $x \mapsto 2x - \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (intervalle de $\mathbb{R}$) et admet donc DES primitives sur $\mathbb{R}_+^*$. DE plus la fonction $x \mapsto x^2 - \ln(x)$ est UNE primitive de $x \mapsto 2x - \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Par conséquent l'ensemble $\mathscr{S}_0$ des solutions de (E_0) est donné par

$$\begin{aligned}\mathscr{S}_0 &= \left\{ y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C\,\mathrm{e}^{x^2 - \ln(x)} \end{array} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x} \end{array} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}.\end{aligned}$$

Appliquons maintenant la méthode de variation de la constante. Soit $z \in \mathscr{F}\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\right)$ et posons pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y_0(x) = \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}$ et $y(x) = z(x)y_0(x)$. Puisque la fonction y_0 est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que y est dérivable si et seulement si z est dérivable et dans ce cas,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y'(x) = z'(x)y_0(x) + z(x)y_0'(x).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}(E) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad z'(x)y_0(x) + z(x)y_0'(x) - \left(2x - \frac{1}{x}\right) z(x)y_0(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad z'(x)y_0(x) + z(x)\underbrace{\left(y_0'(x) - \left(2x - \frac{1}{x}\right) y_0(x)\right)}_{=0 \text{ car } y_0 \in \mathscr{S}_0} = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad z'(x)y_0(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad z'(x) = x\,\mathrm{e}^{-x^2}.\end{aligned}$$

On reconnait une fonction du type $u'\,\mathrm{e}^u$ avec $u : x \mapsto -x^2$. Donc une primitive de z' sur $\mathbb{R}_+^*$ est donnée par $x \mapsto -\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2}$. Par suite,

$$\begin{aligned}(E) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad z(x) = -\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2} + C \\ &\Leftrightarrow \quad \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y(x) = z(x)y_0(x) = \left(-\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2} + C\right)\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x} = \frac{-1}{2x} + C\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}.\end{aligned}$$

Conclusion, en notant $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de (E), et $y_p : x \mapsto \frac{-1}{2x}$, on obtient un espace affine de dimension 1 (un espace vectoriel translaté d'une solution particulière)

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{-1}{2x} + C\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x} \end{array} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\} = y_p + \mathrm{Vect}\,(y_0).}$$