Révisions d'hiver 06

Pour Samedi 02/03

Calcul algébrique, partie entière et suites réelles

Exercice I (S'entrainer)

Soient $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite.

Solution de l'exercice I

Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait que pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$a - 1 \leqslant \lfloor a \rfloor \leqslant a.$$

Donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$kx - 1 \leqslant \lfloor kx \rfloor \leqslant kx.$$

En sommant cette inégalité, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} (kx - 1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor \leqslant \sum_{k=1}^{n} kx,$$

et donc

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} (kx - 1) \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} kx.$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} (kx - 1) &= \frac{x}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k - \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= \frac{x}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n}{n^2} \\ &= \frac{x}{2} \frac{n+1}{n} - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

De même

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} kx = \frac{x}{2} \frac{n+1}{n}.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{x}{2} \frac{n+1}{n} - \frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \frac{x}{2} \frac{n+1}{n}.$$

De plus,

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{x}{2} \frac{n+1}{n} - \frac{1}{n} \right) = \frac{x}{2} \times 1 - 0 = \frac{x}{2} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{x}{2} \frac{n+1}{n} \right).$$

Donc par encadrement, on conclut que

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{x}{2}.$$