Révisions de Juin 03

Pour Jeudi 13/06

Représentation matricielle, déterminant, séries numériques

Exercice I

Exo5 TD27bis
Donner le déterminant d'une matrice nilpotente i.e. une matrice $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel qu'il existe $p \in \mathbb{N}$, $N^p = O_p$.

Exercice II

Exo5 TD27bis (suite)
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $E = \left\{ \begin{array}{ccc} [0;1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^x P(x) \end{array} \middle| P \in \mathbb{R}_n[X] \right\}$. On admet que E est un espace vectoriel (facile) et pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, on pose $e_k : x \mapsto \mathrm{e}^x x^k$. On note enfin $\mathscr{B} = (e_k)_{k\in[\![0;n]\!]}$. Enfin, on appelle D la dérivation sur E.

1. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de E.
2. Déterminer A la matrice de D dans la base E.
3. Calculer le déterminant de D i.e. de A.

Exercice III

On note E l'ensemble des suites réelles bornées. On définit sur E l'application,

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E \times E & \to & \mathbb{R} \\ \left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k v_k \,\mathrm{e}^{-k}, \end{array}$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. Montrer que φ est bien définie.
3. Démontrer que φ est un produit scalaire.
   Attention, on rappelle que $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$ *n'implique pas en général* $\alpha_n = 0$ *(même à partir d'un certain rang)...*