Révisions de Noël 01 Correction

Pour Mercredi 26/12

Solution de l'exercice I

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Soient u et v deux fonctions de $[a;b]$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$. Alors,

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Solution de l'exercice II

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{llll} P(z)=0 & \Leftrightarrow & \left(z^2-2z-11\right)^2+4\left(2z+1\right)^2 & \\ & \Leftrightarrow & \left(z^2-2z-11\right)^2=-4\left(2z+1\right)^2 & \\ & \Leftrightarrow & \left(z^2-2z-11\right)^2=\left(2i\right)^2\left(2z+1\right)^2 & \\ & \Leftrightarrow & z^2-2z-11=\left(2i\right)\left(2z+1\right) \quad \text{OU} & z^2-2z-11=-\left(2i\right)\left(2z+1\right) \\ & \Leftrightarrow & z^2-2z-11=4iz+2i \quad \text{OU} & z^2-2z-11=-4iz-2i \\ & \Leftrightarrow & z^2-\left(2+4i\right)z-11-2i=0 \quad \text{OU} & z^2-\left(2-4i\right)z-11+2i=0 \\ & \Leftrightarrow & R(z)=0 \quad \text{OU} & Q(z)=0. \end{array}$$

On a donc bien montré que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\boxed{P(z)=0 \quad \Leftrightarrow \quad R(z)=0 \quad \text{OU} \quad Q(z)=0.}$$

2. On cherche à résoudre l'équation $Q(z) = z^2 - (2-4i)\,z - 11 + 2i = 0 = 0$. Soit Δ le discriminant associé. On a

$$\Delta = (2-4i)^2 - 4\left(-11+2i\right) = 4\left((1-2i)^2+11-2i\right) = 4\left(1-4i-4+11-2i\right) = 4\left(8-6i\right) = 4\left(8-6i\right).$$

Posons $\delta = x+iy$ une racine carrée de $\Delta' = 8-6i$ i.e. tel que $\delta^2 = \Delta'$. On note que $|\Delta'| = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$. On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{lll} \begin{cases} x^2-y^2+2ixy=8-6i \\ x^2+y^2=10 \end{cases} & \Leftrightarrow & \begin{cases} x^2-y^2=8 \\ xy=-3 \\ x^2+y^2=10 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow & \begin{cases} x^2=9 \\ y^2=1 \\ x \text{ et } y \text{ de signe opposé} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow & \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow & \delta = 3-i \quad \text{OU} \quad \delta=-3+i. \end{array}$$

Les deux racines carrées de Δ sont donc

$$2\left(3-i\right)=6-2i \qquad \text{ET} \qquad 2\left(-3+i\right)=-6+2i$$

On en déduit alors que les deux racines de Q sont données par

$$z_1 = \frac{(2-4i)+6-2i}{2} = 4-3i \qquad \text{ET} \qquad z_2 = \frac{(2-4i)-6+2i}{2} = -2-i.$$

Donc l'ensemble des racines de Q est
$$\{4-3i;-2-i\}.$$

3. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
Q(\overline{z})=0 &\Leftrightarrow \overline{z}^2-(2-4i)\,\overline{z}-11+2i=0\\
&\Leftrightarrow \overline{\overline{z}^2-(2-4i)\,\overline{z}-11+2i}=0\\
&\Leftrightarrow z^2-(2+4i)\,z-11-2i=0\\
&\Leftrightarrow R(z)=0.
\end{aligned}$$

Donc pour tout $z \in \mathbb{C}$, $Q(\overline{z})=0 \Leftrightarrow R(z)=0.$

4. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
P(z)=0 &\Leftrightarrow R(z)=0 \quad \text{OU} \quad Q(z)=0 \quad \text{d'après la question 1,}\\
&\Leftrightarrow Q(\overline{z})=0 \quad \text{OU} \quad Q(z)=0 \quad \text{d'après la question 3,}\\
&\Leftrightarrow \overline{z}=4-3i \ \text{OU}\ \overline{z}=-2-i \ \text{OU}\ z=4-3i \ \text{OU}\ z=-2-i \quad \text{d'après la question 2,}\\
P(z)=0 &\Leftrightarrow z=4+3i \quad \text{OU} \quad z=-2+i \quad \text{OU} \quad z=4-3i \quad \text{OU} \quad z=-2-i.
\end{aligned}$$