# Révisions de Noël 02 Correction

## Pour Jeudi 27/12

### Solution de l'exercice I

Soit $(n,m,p) \in (\mathbb{N}^*)^3$. Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}} \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $B = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. En posant $C = AB = (c_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a alors

$$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!], \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}.$$

### Solution de l'exercice II

On commence par noter que la fonction $f : x \mapsto \cos(x)\ln(1+x)$ est bien définie au voisinage de 0 et plus précisément sur $]-1;+\infty[$. On sait que la forme régulière du développement limité du logarithme est de la forme $x(1+\dots)$ et celui du cosinus $1+\dots$. Celui du produit sera donc de la forme $x(1+\dots)(1+\dots) = x(1+\dots)$. Donc pour obtenir un développement limité à l'ordre 4 de $f$ en 0 un développement limité à l'ordre 3 des formes suffira. A l'aide des développements limités usuels, on sait que

$$\begin{aligned}
\cos(x) &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)\\
\ln(1+x) &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o\left(x^4\right) = x\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o\left(x^3\right)\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent le produit donne

$$\begin{aligned}
f(x) = \cos(x)\ln(1+x) &\underset{x\to 0}{=} \left(1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o\left(x^4\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} x - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3} - \tfrac{x^4}{4} + o\left(x^4\right)\\
&\qquad - \tfrac{x^3}{2} + \tfrac{x^4}{4} - \tfrac{x^2}{2}\left(\tfrac{x^3}{3} - \tfrac{x^4}{4} + o\left(x^4\right)\right)\\
&\qquad + o\left(x^3\right)\left(x - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3} - \tfrac{x^4}{4} + o\left(x^4\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} x - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3} - \tfrac{x^4}{4} + o\left(x^4\right)\\
&\qquad - \tfrac{x^3}{2} + \tfrac{x^4}{4} + o\left(x^4\right)\\
&\qquad + o\left(x^4\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\cos(x)\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right).}$$