Révisions de Noël 05 Correction

Du dimanche 30/12

Solution de l'exercice I

Savoir définir une relation d'équivalence.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on définit la relation $A\mathcal{R}B \Leftrightarrow \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$.
   (a) La relation $\mathcal{R}$ est réflexive : pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A)$ naturellement donc $A\mathcal{R}A$.
   (b) La relation $\mathcal{R}$ est transitive : pour tout $A, B, C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, si $A\mathcal{R}B$ et si $B\mathcal{R}C$ alors $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$ et $\operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(C)$ et donc par transitivité de la relation $=$, $A = C$. Par conséquent on a bien $A\mathcal{R}C$.
   (c) La relation $\mathcal{R}$ est symétrique : pour tout $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, si $A\mathcal{R}B$ alors $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$ et donc $\operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(A)$ et par conséquent $B\mathcal{R}A$.

   $\boxed{\text{Donc la relation } \mathcal{R} \text{ est une relation d'équivalence sur } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$
2. Sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on définit la relation $z\mathcal{R}z' \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(z') > 0$.
   (a) La relation $\mathcal{R}$ est réflexive : pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on a $\operatorname{Im}(z) \neq 0$. Donc $\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(z) = (\operatorname{Im}(z))^2 > 0$ et ainsi, $z\mathcal{R}z$.
   (b) La relation $\mathcal{R}$ est transitive : pour tout $z, z', z'' \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, si $z\mathcal{R}z'$ et si $z'\mathcal{R}z''$ alors $\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(z') > 0$ et $\operatorname{Im}(z')\operatorname{Im}(z'') > 0$. Autrement dit $\operatorname{Im}(z)$ et $\operatorname{Im}(z')$ sont non nuls et de même signe et de même $\operatorname{Im}(z')$ et $\operatorname{Im}(z'')$ sont non nuls et de même signe. Donc $\operatorname{Im}(z)$ et $\operatorname{Im}(z'')$ sont non nuls et aussi de même signe (le même que celui de $\operatorname{Im}(z')$). Dès lors $\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(z'') > 0$ et on a bien $z\mathcal{R}z''$.
   (c) La relation $\mathcal{R}$ est symétrique : pour tout $z, z' \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, si $z\mathcal{R}z'$ alors $\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(z') > 0$ et donc $\operatorname{Im}(z')\operatorname{Im}(z) > 0$ et par conséquent $z'\mathcal{R}z$.

   $\boxed{\text{Donc la relation } \mathcal{R} \text{ est une relation d'équivalence sur } \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.}$

   Notez qu'il est assez facile de voir que cette relation définit deux classes d'équivalence, les complexes avec une partie imaginaire strictement positive (le demi-plan supérieur, appelé demi-plan de Poincaré) et les complexes avec une partie imaginaire strictement négative (le demi-plan inférieur, non breveté vous pouvez toujours proposer votre nom).
3. Sur $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on définit la relation $\mathcal{R}$ par $f\mathcal{R}g \Leftrightarrow f(0) = g(0)$.
   (a) La relation $\mathcal{R}$ est réflexive : pour tout $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a $f(0) = f(0)$ et donc $f\mathcal{R}f$.
   (b) La relation $\mathcal{R}$ est transitive : pour tout $f, g, h \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, si $f\mathcal{R}g$ et si $g\mathcal{R}h$ alors $f(0) = g(0)$ et $g(0) = h(0)$ et donc $f(0) = h(0)$, i.e. $f\mathcal{R}h$.
   (c) La relation $\mathcal{R}$ est symétrique : pour tout $f, g \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, si $f\mathcal{R}g$ alors $f(0) = g(0)$, donc $g(0) = f(0)$ et donc $g\mathcal{R}f$.

   $\boxed{\text{La relation } \mathcal{R} \text{ est une relation d'équivalence sur } \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}).}$

II S'entraîner

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $S_n = \displaystyle\sum_{\substack{0 \leqslant i,j \leqslant n \\ i+j<n}} i+j$. On note que pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ si $0 \leqslant i, j \leqslant n$ et si $i+j < n$ alors nécessairement $0 \leqslant i \leqslant n-1$ et si $i \in [\![0; n-1]\!]$ et $i + j < n$ alors $0 \leqslant j \leqslant n - i - 1$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
S_n = \sum_{\substack{0 \leqslant i,j \leqslant n \\ i+j<n}} i+j = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-i-1} (i+j) &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(i \sum_{j=0}^{n-i-1} 1 + \sum_{j=0}^{n-i-1} j \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left(i(n-i) + \frac{(n-i-1)(n-i)}{2} \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{2in - 2i^2 + n^2 - in - in + i^2 - n + i}{2} \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{n^2 - n + i - i^2}{2} \right)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} S_n = \frac{n(n-1)}{2}\sum_{i=0}^{n-1} 1 + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} i - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} i^2 &= \frac{n(n-1)}{2}n + \frac{1}{2}\frac{(n-1)n}{2} - \frac{1}{2}\frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6} \\ &= \frac{(n-1)n}{12}\left(6n+3-(2n-1)\right) \\ &= \frac{(n-1)n}{12}\left(4n+4\right). \end{aligned}$$

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{S_n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}.}$$