# Révisions de Noël 06 Correction

## Du mercredi 02/01

## Solution de l'exercice I

**Comparaison asymptotique.** Dans chaque cas, comparer en justifiant le comportement asymptotique des suites dont on donne le terme général.

1. Lorsque $n \to +\infty$, $\mathrm{e}^{-n} \to 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1+\mathrm{e}^{-n}\right) = \lim\limits_{u\to0} \ln(1+u) = 0$. D'autre part, $3n+5 \underset{n\to+\infty}{\sim} 3n$ et $1+\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$ donc $\frac{3n+5}{1+\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 3\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n+5}{1+\sqrt{n}} = +\infty$. Par conséquent, on a
$$\boxed{\ln\left(1+\mathrm{e}^{-n}\right) \underset{n\to+\infty}{\ll} \frac{3n+5}{1+\sqrt{n}}.}$$

2. D'une part, on a $u = \frac{3}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\arctan(u) \underset{u\to0}{\sim} u$ donc $\arctan\left(\frac{3}{n^3}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{n^3}$ (la composition à droite est autorisée pas la composition à gauche). D'autre part puisque $v = \frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et que $\sin(v) \underset{v\to0}{\sim} v$, on en déduit que $\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$. Comme on a aussi $\frac{3}{n} + \frac{2}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{n}$, on en déduit par produit que
$$\left(\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{n}\times\frac{1}{n^2} = \frac{3}{n^3}.$$
Finalement,
$$\boxed{\left(\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \arctan\left(\frac{3}{n^3}\right).}$$

3. $5^{-n}$ et $n^{-5}$. Par croissance comparée, on a
$$\frac{n^{-5}}{5^{-n}} = \frac{\mathrm{e}^{n\ln(5)}}{n^5} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$
Donc
$$\boxed{5^{-n} \underset{n\to+\infty}{\ll} n^{-5}.}$$

## Solution de l'exercice II

On souhaite donner le développement limité de $x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$ à l'ordre 4 en 0.

1. D'après le cours,
$$\boxed{\cos(x) \underset{x\to0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o\left(x^4\right) \underset{x\to0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right).}$$

2. En utilisant directement la question précédente, on obtient
$$\boxed{u(x) = \cos(x)-1 \underset{x\to0}{=} -\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right).}$$

3. Au voisinage de 0, on a
$$\begin{aligned} u^2(x) \underset{x\to0}{=} u(x)u(x) &\underset{x\to0}{=} \left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)\right)\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)\right) \\ &\underset{x\to0}{=} \frac{x^4}{4} \underbrace{-\frac{x^2}{2}\left(\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)\right)}_{=o(x^4)} + \underbrace{\left(\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)\right)\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)\right)}_{=o(x^4)} \end{aligned}$$
$$\boxed{u^2(x) \underset{x\to0}{=} \frac{x^4}{4}+o\left(x^4\right).}$$

On en déduit également que $u^2 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^4}{4}$ et donc

$$\boxed{o\left(u^2\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(\frac{x^4}{4}\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^4\right).}$$

4. D'après le cours,

$$\boxed{\frac{1}{1+u} \underset{x\to 0}{=} 1-u+u^2+o\left(u^2\right).}$$

5. Posons pour tout $x\in\mathbb{R}$, $u(x)=\cos(x)-1$. De la question 2, on en déduit que $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$, et notamment que $u(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Donc au voisinage de 0, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos(x)} &= \frac{1}{1+u(x)} \\
&\underset{x\to 0}{=} 1-u+u^2+o\left(u^2\right) && \text{d'après la question 4} \\
&\underset{x\to 0}{=} 1-\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)\right)+\left(\frac{x^4}{4}+o\left(\frac{x^4}{4}\right)\right)+o\left(x^4\right) && \text{d'après les questions 2 et 3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+o\left(x^4\right).}$$