Révisions de Noël 07 Correction

Du jeudi 03/01

Solution de l'exercice I

Savoir déterminer un équivalent. Dans chaque cas, déterminer un équivalent le plus simple possible (cf exercice 2 TD13).

1. On sait que $\cos(u) \underset{u\to 0}{=} 1 - \frac{u^2}{2} + o\left(u^2\right)$. Or quand $n \to +\infty$, on a $u = \frac{1}{n} \to 0$. Donc par composition à droite, on a
$$u_n = 1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \left(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
Par conséquent,
$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.}$$

2. Puisque $\mathrm{e}^n \underset{n\to+\infty}{\ll} n!$, on a $n! + \mathrm{e}^n \underset{n\to+\infty}{\sim} n!$. D'autre part, $2^n + 3^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 3^n$. Par quotient,
$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n!}{3^n}.}$$

3. Comme $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{0}$, on déduit du développement limité du sinus : $\sin(u) \underset{u\to 0}{=} u + o(u)$ que $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Donc
$$u_n = \ln\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \ln\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$
ATTENTION !! La composée des équivalents est faux à gauche en général ! Donc $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ n'implique pas $\ln\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left(\frac{1}{n}\right)$. Cependant, en mettant le terme prépondérant en facteur, on obtient que
$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln\left(\frac{1}{n}(1 + o(1))\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\ln(n) + \ln(1 + o(1)).$$
Or on rappelle que $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1) \Leftrightarrow v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc $\ln(1+o(1)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $\ln(1+o(1)) \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$ et par suite $\ln(1+o(1)) \underset{n\to+\infty}{=} o(\ln(n))$. Par conséquent
$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} -\ln(n) + o(\ln(n)).$$
Finalement,
$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln(n).}$$

4. Plus facile. On a d'une part $n^2+n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$ et donc par élévation à la puissance $1/2$, $\sqrt{n^2+n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$. D'autre part et de même, $n^2 - n + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$ et $\sqrt{n^2-n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$. Donc par quotient,
$$\boxed{u_n = \frac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt{n^2-n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{n} = 1.}$$

5. On sait que $1 \underset{n\to+\infty}{\ll} \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\ll} 2n^3$. Donc $2n^3 - \ln(n) + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n^3$. D'autre part $n^2+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$. Ainsi,
$$\boxed{u_n = \frac{2n^3 - \ln(n) + 1}{n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n^3}{n^2} = 2n.}$$

II S'entraîner

On considère la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \arctan\left(\frac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1}\right).$$

1. Soit $\mathscr{D}_f$ l'ensemble de définition de f. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$x \in \mathscr{D}_f \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2+2x-1 \neq 0.$$

Soit Δ le discriminant de x^2+2x-1. On a $\Delta = 4+4 = 8$, par conséquent les racines de ce polynôme sont $\frac{-2-2\sqrt{2}}{2} = -1-\sqrt{2}$ et $\frac{-2+2\sqrt{2}}{2} = -1+\sqrt{2}$.

$\boxed{\text{Le domaine de définition de } f \text{ est donc } \mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1-\sqrt{2}; -1+\sqrt{2}\}.}$

La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition donc

$\boxed{\text{le domaine de dérivabilité de } f \text{ est aussi } \mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1-\sqrt{2}; -1+\sqrt{2}\}.}$

2. Soit $x \in \mathscr{D}_f$. On a par dérivation d'une composée et d'un quotient,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1}\right)' \frac{1}{1+\left(\frac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1}\right)^2} \\
&= \frac{(2x-2)\left(x^2+2x-1\right)-\left(x^2-2x-1\right)(2x+2)}{\left(x^2+2x-1\right)^2} \frac{1}{1+\left(\frac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1}\right)^2} \\
&= \frac{2x^3+4x^2-2x-2x^2-4x+2-\left(2x^3+2x^2-4x^2-4x-2x-2\right)}{\left(x^2+2x-1\right)^2+\left(x^2-2x-1\right)^2} \\
&= \frac{4x^2+4}{x^4+4x^2+1+4x^3-2x^2-4x+x^4+4x^2+1-4x^3-2x^2+4x} \\
&= \frac{4\left(x^2+1\right)}{2x^4+4x^2+2} \\
&= \frac{2\left(x^2+1\right)}{x^4+2x^2+1} \\
&= \frac{2\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2} \\
\boxed{f'(x) = \frac{2}{x^2+1}} & \qquad \text{car } x^2+1 \neq 0
\end{aligned}$$

3. On a donc pour tout $x \in \mathscr{D}_f$,

$$\boxed{f'(x) = 2\arctan'(x).}$$

On souhaite intégrer cette égalité pour obtenir une expression plus simple de f. ATTENTION ! On ne peut intégrer que sur des intervalles. Donc il existe $C_1 \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \left]-\infty; -1-\sqrt{2}\right[$,

$$f(x) = 2\arctan(x) + C_1.$$

De même, il existe $C_2 \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \left]-1-\sqrt{2}; -1+\sqrt{2}\right[$,

$$f(x) = 2\arctan(x) + C_2.$$

Et enfin, il existe $C_3 \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \left]-1+\sqrt{2}; +\infty\right[$,

$$f(x) = 2\arctan(x) + C_2.$$

On détermine ces constantes.

- D'une part, $f(0) = \arctan\left(\frac{-1}{-1}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. Et d'autre part, $f(0) = 2\arctan(0) + C_2 = C_2$. Donc $C_2 = \frac{\pi}{4}$.

- De façon analogue, puisque $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$, on en déduit que $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\arctan(1)=\dfrac{\pi}{4}$. D'autre part $\lim_{x\to-\infty}f(x)=2\lim_{x\to-\infty}\arctan(x)+C_1=-2\dfrac{\pi}{2}+C_1=C_1-\pi$. Par conséquent, $C_1=\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{5\pi}{4}$.
- A nouveau, $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1}=1$ et donc $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\arctan(1)=\dfrac{\pi}{4}$. Puis, $\lim_{x\to+\infty}f(x)=2\dfrac{\pi}{2}+C_3$. Donc $C_3=\frac{\pi}{4}-\pi=-\frac{3\pi}{4}$.

Conclusion

$$\boxed{f(x)=\begin{cases}2\arctan(x)+\frac{5\pi}{4} & \text{si } x\in\left]-\infty;-1-\sqrt{2}\right[\\ 2\arctan(x)+\frac{\pi}{4} & \text{si } x\in\left]-1-\sqrt{2};-1+\sqrt{2}\right[\\ 2\arctan(x)-\frac{3\pi}{4} & \text{si } x\in\left]-1+\sqrt{2};+\infty\right[\end{cases}}$$

4. On obtient le graphe de f par une dilatation verticale de facteur 2 de la fonction arctangente puis par une translation verticale de vecteur $\frac{5\pi}{4}\vec{i}$, $\frac{\pi}{4}\vec{i}$ et $-\frac{3\pi}{4}\vec{i}$ respectivement sur chacun des intervalles.