Révisions de Printemps 04

Pour Vendredi 26/04

Intégration

Erreur 4 du DS7 à corriger : un peu plus subtil, donner un contre-exemple de l'affirmation suivante. Soient p et q deux applications linéaires telles que

$$\mathrm{Im}\,(p) = \mathrm{Im}\,(q)\,.$$

Alors $p = q$.

En version originale, j'ai vu $Im\,(p) = Im\,\left(p^2\right) \;\Rightarrow\; p = p^2$.

Exercice I (S'entrainer) *Exercice 12 TD23.*

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégrale que

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Indication : en la redémontrant, appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Solution de l'erreur 3 du DS7 : Posons

$$p \quad : \quad \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad q \quad : \quad \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

On constate alors que $\mathrm{Im}\,(p) = \mathrm{Im}\,(q) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et pourtant $p \neq q$, par exemple $p\,(1,0) = (1,0) \neq (0,0) = q\,(1,0)$. On pouvait prendre aussi plus simple dans $\mathbb{R}$, $p = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ et $q = 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Solution de l'exercice I

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction exponentielle étant $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, elle est notamment $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[0;x]$ (ou $[x;0]$). De plus pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\exp^{(k)}(t) = \exp(t).$$

Donc par la formule de Taylor avec reste intégral (notez bien que c'est l'hypothèse $\mathscr{C}^{n+1}$ pour aller à l'ordre n), on a

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \exp^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{e}^0}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$\mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Supposons $x \geqslant 0$. Alors, par croissance de l'exponentielle, pour tout $t \in [0;x]$,

$$0 \leqslant \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}^x.$$

Or, pour tout $t \in [0;x]$, $\frac{(x-t)^n}{n!} \geqslant 0$. Donc pour tout $t \in [0;x]$,

$$0 \leqslant \frac{(x-t)^n}{n!} \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}^x \frac{(x-t)^n}{n!}.$$

Donc par croissance de l'intégrale (car $x \geqslant 0$),

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \mathrm{e}^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t \qquad \text{car } \mathrm{e}^x \text{ ne dépend pas de } t.$$

Donc par (1),

$$\begin{aligned} & 0 \leqslant \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leqslant \mathrm{e}^x \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t \\ \Leftrightarrow \quad & 0 \leqslant \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leqslant \mathrm{e}^x \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_{t=0}^{t=x} \\ \Leftrightarrow \quad & 0 \leqslant \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leqslant \mathrm{e}^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Nous venons de démontrer l'inégalité de Taylor-Lagrange. De même, si $x \leqslant 0$, on a

$$\mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = -\int_x^0 \frac{(x-t)^n}{n!} \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

Donc, par l'inégalité triangulaire,

$$0 \leqslant \left| \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \int_x^0 \left| \frac{(x-t)^n}{n!} \mathrm{e}^t \right| \mathrm{d}t.$$

Or pour tout $t \in [x; 0]$, $0 \leqslant \mathrm{e}^t \leqslant 1$. Donc

$$0 \leqslant \left| \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{n!} \,\mathrm{d}t = \left[\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_{t=x}^{t=0} = \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Dans tous les cas, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant \left| \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \mathrm{e}^{\max(0,x)} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Or par croissance comparée, on sait que $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc par le théorème d'encadrement, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| = 0,$$

i.e. la suite des sommes partielles (à x fixé !) $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Autrement dit $\boxed{\text{la série } \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^k}{k!} \text{ converge}}$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$, sa somme totale vaut

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x.}$$