



Révisions de Printemps 05

Pour Samedi 27/04

Analyse asymptotique

Erreur 5 du DS7 à corriger : On pose $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$. Les vecteurs $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ne sont pas colinéaires donc $\dim(\mathcal{B}) = 2$.

Exercice I (S'entraîner)

Soit f la fonction définie pour tout $x > \frac{1}{\pi}$ par

$$f(x) = \sqrt{\frac{\ln^2\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\sin^3\left(\frac{1}{x}\right)}}.$$

1. Déterminer un développement asymptotique à l'ordre $\frac{1}{x^{3/2}}$ de f en $+\infty$.
2. En déduire le comportement asymptotique de f en l'infini.



Solution de l'erreur 5 du DS7 : un exemple parmi d'autres dans lequel vous confondez les objets de natures différentes et pour lesquelles les propriétés/définitions ne s'applique pas. On peut parler de cardinal d'une famille finie de vecteurs mais pas de dimension. Donc puisque \mathcal{B} est libre, on a

$$\dim(\text{Vect}(\mathcal{B})) = \text{Card}(\mathcal{B}) = 2.$$

Solution de l'exercice I

1. Pour tout $x > \frac{1}{\pi}$, $\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > \ln(1) = 0$ et $0 < \frac{1}{x} < \pi$ donc $\sin\left(\frac{1}{x}\right) > 0$. Par conséquent f est bien définie sur $\left] \frac{1}{\pi}; +\infty[\right.$ et

$$\forall x > \frac{1}{\pi}, \quad f(x) = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\sin^{3/2}\left(\frac{1}{x}\right)}, \quad \text{car } \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > 0.$$

On a alors les égalités asymptotiques suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{-3/2} \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)^{-3/2} \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \frac{1}{x^{-3/2}} \left(1 - \frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^{-3/2} \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{x^{3/2}}{x} \left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \left(1 - \frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^{-3/2}. \end{aligned}$$

Or on sait que $(1+u)^{-3/2} = 1 - \frac{3u}{2} + o(u)$. Donc en posant $u = -\frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, on a bien $u \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et $o(u) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} \sqrt{x} \left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \left(1 + \frac{3}{2} \frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} \sqrt{x} \left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \left(1 + \frac{1}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} \sqrt{x} \left(1 + \frac{1}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} \sqrt{x} \left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{7}{12x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{7}{12x\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{7}{12x\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right).$$

2. Notamment, on déduit de la question précédente que

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{x}$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

De plus $\frac{f(x)}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. Conclusion,

f admet une branche asymptotique en $+\infty$ de direction (Ox) .