Révisions de Printemps 08

Pour Mardi 30/04

Suites numériques

Erreur 8 du DS7 à corriger : Soient E un espace vectoriel et f et g deux endomorphismes de E. Pour montrer que $f \circ g = 0_{\mathscr{L}(E)}$ on procède par double inclusion. On montre que $f \circ g \subseteq 0_{\mathscr{L}(E)}$. De plus, puisque f et g sont linéaires, on sait que $0_{\mathscr{L}(E)} \subseteq f \circ g$. On en déduira donc que $f \circ g = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Exercice I (S'entrainer)

On pose $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \,\mathrm{e}^{-u_n}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe constant.
2. On suppose $u_0 \geqslant 0$. Déterminer la limite en $+\infty$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. On suppose $u_0 < 0$. Déterminer la limite en $+\infty$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution de l'erreur 8 du DS7 : je rappelle que $0_{\mathscr{L}(E)}$ désigne l'application linéaire nulle : $x \mapsto 0_E$. Dire qu'une application linéaire $f \circ g$ est incluse dans une autre n'a aucun sens !

Solution de l'exercice I

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{P}(n)$ l'assertion « u_n est de même signe que u_0 ». Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie par récurrence.
   - *Initialisation.* Si $n = 0$, alors u_0 est de même signe que u_0 donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   - *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Alors u_n est de même signe que u_0. Or, par définition, $u_{n+1} = u_n \,\mathrm{e}^{-u_n}$ et naturellement $\mathrm{e}^{-u_n} > 0$. Donc u_{n+1} est de même signe que u_n et par transitivité, u_{n+1} est de même signe que u_0. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est aussi vraie.
   - *Conclusion.* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

   Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est de même signe que u_0. Conclusion, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est de signe constant}}$ (celui de u_0 notamment).
2. On suppose $u_0 \geqslant 0$. Donc par la question précédente, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$ i.e. $-u_n \leqslant 0$. Donc par croissance de la fonction exponentielle, $\mathrm{e}^{-u_n} \leqslant 1$. Ainsi, $u_n \,\mathrm{e}^{-u_n} \leqslant u_n$ car u_n est positif. Donc
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n \,\mathrm{e}^{-u_n} \leqslant u_n.$$
   Autrement dit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Or cette suite étant positive elle est minorée par 0. Donc par le théorème de convergence monotone, on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Notons ℓ sa limite. Par continuité de la fonction $x \mapsto x\,\mathrm{e}^{-x}$, on a
$$\lim_{n\to+\infty} u_n \,\mathrm{e}^{-u_n} = \ell\,\mathrm{e}^{-\ell}.$$
   Or $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ en tant que suite extraite. Donc par passage à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = u_n \,\mathrm{e}^{-u_n}$ on en déduit que
$$\ell = \ell\,\mathrm{e}^{-\ell} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \ell = 0 \\ 1 = \mathrm{e}^{-\ell} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \ell = 0 \\ \ell = -\ln(1) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \ell = 0.$$
   Conclusion, $\boxed{\text{si } u_0 \geqslant 0, \text{ alors la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0}$.
3. On suppose maintenant que $u_0 < 0$. Alors d'après la question 1, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} u_n \leqslant 0 \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{e}^{-u_n} \geqslant \mathrm{e}^0 = 1 && \text{par croissance de l'exponentielle} \\ &\Rightarrow \quad u_n \,\mathrm{e}^{-u_n} \leqslant u_n && \text{car} u_n \leqslant 0 \\ &\Rightarrow \quad u_{n+1} \leqslant u_n. \end{aligned}$$
   Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à nouveau décroissante. Donc par le théorème de croissance monotone, deux cas sont possibles :
   (i) la suite converge vers une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$,
   (ii) la suite diverge vers $-\infty$.

   Supposons que (i) est réalisé. Alors en passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = u_n \,\mathrm{e}^{-u_n}$, on en déduit comme précédemment que $\ell = \ell\,\mathrm{e}^{-\ell} \Leftrightarrow \ell = 0$. Or on sait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Notamment, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_0 < 0$. Donc par passage à la limite dans cette inégalité on en déduit que
$$\ell \leqslant u_0 < 0.$$
   NB : ATTENTION à ne pas dire $u_n < 0$ implique $\ell < 0$ qui est faux en général !! Exemple $u_n = -\frac{1}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a donc montré que $\ell = 0$ et $\ell < 0$ ce qui est contradictoire. Le cas (i) est donc impossible et donc (ii) est vraie : $\boxed{\text{si } u_0 < 0 \text{ alors la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge vers } -\infty}$.