Pour Mercredi 31/10

I Se tester

I.1 Comment obtient-on le graphe de $x \to \mathrm{e}^{x+3} - 5$ à partir de celui de la fonction exponentielle ?

I.2 Donner la transformation sur les complexes associée à une homothétie.

II S'entraîner

Soit f la fonction définie lorsque c'est possible par

$$\begin{aligned} f : \mathscr{D}_f &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 + 1 - \frac{2}{x} \end{aligned}$$

Etudier la fonction f (domaine de définition, variations, limites aux bornes, asymptotes) et préciser la tangente à la courbe au point $x = 1$.

III Complément de cours

Exercice 1. Calculer la dérivée de la fonction $f : \begin{cases}]-1;1[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \end{cases}$.

Corollaire I.3

La fonction logarithme est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration. C'est une conséquence directe de la stricte positivité de sa dérivée sur $\mathbb{R}_+^*$. □

I.1 Propriétés algébriques

Proposition I.4

Soient $x \in]0;+\infty[$, $y \in]0;+\infty[$ et $p \in \mathbb{Z}$.

1. $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.
2. $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.
3. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.
4. $\ln(x^p) = p\ln(x)$.

Démonstration.

III.1 On souhaite démontrer le premier point de la proposition. Soit $y > 0$ un réel fixé. Considérons la fonction g suivante :

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(xy) - \ln(x) - \ln(y). \end{aligned}$$

(a) Démontrer que g est constante.

(b) Evaluer g en 1 et conclure.

III.2 A l'aide du point 1, démontrer le point 2.

III.3 A l'aide des points 1 et 2, démontrer le point 3.

III.4 (a) A l'aide d'une récurrence démontrer le point 4 lorsque $p \in \mathbb{N}$.

(b) En déduire le point lorsque $p \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$.

□