Pour Vendredi 02/11

I Se tester

I.1 Enoncer l'inégalité triangulaire.

I.2 Enoncer les formules d'Euler.

II S'entraîner

II.1 Calculer par télescopage $\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$.

II.2 (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in [\![1; n]\!]$ on a

$$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}.$$

(b) En déduire $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} p\binom{n}{p}$.

III Complément de cours

Pour ce grand weekend, un petit exercice et un peu de lecture.

I.4 Limites remarquables

Exercice 2. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Discuter suivant les valeurs de a de la limite de la suite $(\ln(a^n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition III.1

La fonction logarithme vérifie les limites remarquables suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.
4. $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$.
5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Démonstration.

1. Puisque la fonction logarithme est strictement croissante, soit la fonction logarithme converge vers une limite $l \in \mathbb{R}_+^*$ soit la fonction logarithme diverge vers $+\infty$ (mais ne peut pas avoir de par sa croissance un comportement plus exotique comme une oscillation quelconque). Ce résultat de la limite monotone est intuitif mais sera démontré dans un chapitre ultérieur. Démontrons que le logarithme n'est pas borné c'est-à-dire que pour tout $M > 0$, il existe $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\ln(x) > M$. Fixons $M > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a (cf propriété précédente) $\ln(2^n) = n\ln(2) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 \ln(2) > M$. Donc en prenant $x = 2^{n_0}$, on a bien trouvé un réel tel que $\ln(x) > M$. Ainsi la fonction logarithme est non-bornée et croissante et donc
$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty.$$
2. Pour tout $x > 0$, $\ln(x) = -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$. Donc
$$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \ln(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} -\ln\left(\frac{1}{x}\right).$$
Or $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$. Donc par composition de limites et le point précédent, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \ln(x) = -\infty$.
3. Posons $g : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{\ln(x)}{x} \end{cases}$. La fonction g est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

Donc $g'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1-\ln(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 \geqslant \ln(x)$. La fonction logarithme est continue et strictement croissante sur $[1;+\infty[$, $\ln(1)=0$ et $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$. Donc d'après le théorème de la bijection, $\ln([1;+\infty[)=[0;+\infty[$ et même il existe un unique réel, notons-le e tel que $\ln(\mathrm{e})=1$. Ainsi $g'(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(\mathrm{e})\geqslant \ln(x)$. Par croissance de la fonction logarithme, on en déduit que $g'(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}\geqslant x$. De plus $g(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}$. On obtient donc le tableau de variation de g :

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$x \mapsto g(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	

On constate que la fonction est majorée et admet même un maximum lorsque $x=\mathrm{e}$ qui vaut $\frac{1}{\mathrm{e}}$. Donc pour tout $x>0$,

$$\frac{\ln(x)}{x} \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Notons que par croissance de la fonction logarithme, pour tout $x>1$, $\frac{\ln(x)}{x}\geqslant 0$. Donc pour tout $x>1$,

$$0 \leqslant \frac{\ln\left(\left(\sqrt{x}\right)^2\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{x}} \times \frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Finalement, par le théorème d'encadrement, on en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

4. L'idée est exactement la même que pour démontrer le point 2, en posant le changement de variable $u=\frac{1}{x}$,

$$\lim_{x\to 0} x\ln(x) = \lim_{u\to+\infty} \frac{1}{u}\ln\left(\frac{1}{u}\right) = -\lim_{u\to+\infty}\frac{\ln(u)}{u} = 0.$$

5. On reconnaît la dérivée de la fonction logarithme en 1 :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(1)}{x} = \ln'(1) = 1.$$

□

Remarque 2 : Au cours de la démonstration, nous avons démontré le résultat suivant : il existe un unique réel $\mathrm{e}\in]0;+\infty[$ tel que $\ln(\mathrm{e})=1$. Ce nombre s'appelle la constante de Neper.

Corollaire III.2

Le graphe de fonction logarithme a

- une asymptote verticale $x=0$ en 0,
- une tangente d'équation $y=x-1$ au point $(1;0)$,
- une branche parabolique de direction (Ox) en $+\infty$.

I.5 Graphe et variations

De notre étude précédente, on en déduit le tableau de variation suivant :

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Ainsi que son graphe :