# Pour mercredi 24/10

## I Se tester

Soient $a$ et $b$ deux réels.

I.1 Linéariser $\cos(a)\cos(b)$.

I.2 Factoriser $\sin(a)+\sin(b)$.

## II S'entraîner

II.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{j}$.

II.2 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(u_k - 2u_{k+1} + u_{k+2})$.

## III Complément de cours

**Proposition VI.3**

Soient $U \subseteq \mathbb{R}$, $V \subseteq \mathbb{R}$ et $f : U \to V$.

1. La fonction $f$ est injective si et seulement s'il existe $g : V \to U$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_U$, c'est-à-dire telle que pour tout $x \in U$, $g \circ f(x) = x$.
2. La fonction $f$ est surjective si et seulement s'il existe $g : V \to U$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_V$, c'est-à-dire telle que pour tout $y \in V$, $f \circ g(y) = y$.
3. La fonction $f$ est bijective si et seulement s'il existe une unique fonction $g : V \to U$ telle que pour tout $g \circ f = \mathrm{Id}_U$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_V$.

III.1 On désire démontrer le point 2. Soit $f$ une fonction surjective. Par définition, pour tout $y \in V$ il existe au moins un antécédent de $y$ par $f$ dans $U$. Pour chaque $y \in V$, on en choisit un (au hasard en fait peu importe lequel on choisit si jamais on a plusieurs antécédents possibles) noté $x$ et on définit pour ce $y$ et ce $x$, l'élément $g(y)$ par $x$. La fonction $g$ est alors une fonction bien définie sur $V$ et à valeurs dans $V$. A-t-on $f \circ g = \mathrm{Id}_V$ ? Pourquoi ?

III.2 On souhaite montrer le point 3. On suppose maintenant que $f$ est bijective. Montrer que la fonction $g$ définie dans le paragraphe précédent vérifie également $g \circ f = \mathrm{Id}_U$.