Pour vendredi 26/10

I Se tester

I.1 Enoncer proprement la définition d'une tangente à la courbe représentative d'une fonction.

I.2 Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

II S'entraîner

II.1 Démontrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(a+b)^2 \leqslant 2\left(a^2+b^2\right)$.

II.2 Démontrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(a+b)^4 \leqslant 8\left(a^4+b^4\right)$ *(question 7, exercice 16, TD 5).*

III Complément de cours

Je laisse l'exercice 50 ci-dessous à ceux qui veulent s'amuser. Pour les autres, je vous demande plutôt d'apprendre la définition VI.4, la Proposition VI.5 et de chercher le troisième point des exemples 52 et la petite démonstration de la proposition VI.5 ce sera déjà bien.

Exercice 50 : Soient $U \subseteq \mathbb{R}$, $V \subseteq \mathbb{R}$ et $f : U \to V$.

1. Montrer que f est injective si et seulement s'il existe $g : V \to U$ telle que $g \circ f$ soit injective.
2. Montrer que f est surjective si et seulement s'il existe $g : V \to U$ telle que $f \circ g$ soit surjective.

Définition VI.4

Soient U et V deux parties de $\mathbb{R}$ et $f : U \to V$ une bijection. On appelle **fonction réciproque**, notée f^{-1}, l'unique fonction $V \to U$ telle que $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_U$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_V$.

Remarque 51 : La fonction réciproque f^{-1} est une fonction bijective et sa propre réciproque est f. Autrement dit $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

Exemples 52 :

- La fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ et sa réciproque est la fonction logarithme $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$.
- La fonction inverse $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ est une fonction bijective égale à sa propre réciproque.
- Montrer que $f :]1; +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln\left(x^2-1\right)$ est une bijection et déterminer sa fonction réciproque.

Proposition VI.5

Soient U et V deux parties de $\mathbb{R}$ et $f : U \to V$ une bijection. Le graphe de la fonction réciproque f^{-1}, $\Gamma_{f^{-1}}$ est le symétrique du graphe de f, Γ_f par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Démonstration. On admet le résultat suivant (qui peut faire l'objet d'un exercice sympathique, avis aux amateurs) : *Soient $M(x; y)$ et $M'(x'; y')$ deux points du plan. Les points M et M' sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ si et seulement si $x' = y$ et $y' = x$.*
A partir de ce résultat, démontrer la proposition ci-dessus. $\square$