Pour samedi 27/10

I Se tester

I.1 Que valent les limites suivantes : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{\sin(x)}{x}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{1-\cos^2(x)}{x^2}$?

I.2 Exprimer de deux façons la dérivée de la fonction tangente.

II S'entraîner

II.1 Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a les dérivées n-ièmes de la fonction sinus suivantes : $\sin^{(n)} : x \mapsto \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

II.2 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, linéariser $\sin^3(x)$.

II.3 En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ième de $x \mapsto \sin^3(x)$.

III Complément de cours

Bien lire les deux versions du théorème de la bijection, les apprendre puis compléter le tableau de l'exemple 53 par les intervalles J que l'on doit obtenir. Attention lorsque f n'est pas définie en b ou en a on ne pourra pas écrire $f(a)$ ou $f(b)$...

Théorème VI.6 (Théorème de la bijection - version 1)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ de bornes $a < b$ (éventuellement infinies) et $f : I \to \mathbb{R}$. Si f est une fonction continue et strictement monotone sur I alors pour tout k compris entre les limites de f en a et b, il existe un unique $c \in I$ tel que $f(c) = k$.

Remarque 53 : Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ de bornes $a < b$ (éventuellement infinies) et si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue et strictement monotone sur I alors le théorème précédent assure que $J = f(I)$ est un intervalle. Il est de plus de même nature que I. Plus précisément :

I	si f est croissante	si f est décroissante
$[a;b]$	$[f(a);f(b)]$	
$[a;b[$		
$]a;b]$		
$]a;b[$		

Théorème VI.7 (Théorème de la bijection - version 2)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Si f est une fonction continue et strictement monotone sur I alors

- $J = f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f réalise une bijection de I dans J,
- l'application réciproque f^{-1} est une bijection de $J \to I$, continue et strictement monotone sur J, de même monotonie que f.