Pour mardi 30/10

I Se tester

I.1 Donner les formules de l'angle moitié.

I.2 Développer le carré du module de la somme de deux complexes.

II S'entraîner

Soient z_1, z_2 et z_3 trois complexes vérifiant les propriétés suivantes.

1. Le produit des trois complexes vaut $4\sqrt{2}\,(-1+i)$.
2. Le complexe z_1 possède un argument dans $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$.
3. Les modules de z_1, z_2 et z_3 sont, dans cet ordre, en progression géométrique de raison 2.
4. Les complexes z_1, z_2 et z_3 ont, dans cet ordre, des arguments en progression arithmétique de raison $\frac{\pi}{4}$.

Déterminer ces trois complexes.

Bonus

Exemples 49 :

- Soit $f :]1;+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln\left(x^2-1\right)$. Nous avions montré que dans la planche de jeudi dernier que la fonction f était injective.

Le résultat suivant m'a été suggéré :

II.1 Démontrer que la fonction f est de plus surjective sur $\mathbb{R}$.

III Complément de cours

On ne va pas se refroidir comme cela. Le chapitre de la rentrée concernera les fonctions usuelles. Je vous propose de regarder ensemble à travers ces révisions la partie concernant le logarithme et l'exponentiel, partie qui est un rappel de terminale. Cela nous permettra de nous consacrer en classe aux vraies nouveautés : fonctions puissances, hyperboliques et circulaires réciproques. Je compte sur vous pour bien noter et me remonter toute incompréhension (par mail ou en classe lundi).

Chapitre VII : Fonctions usuelles

I La fonction logarithme

I.1 Définition

Vous avez vu en lycée la construction de la fonction exponentielle comme l'unique solution de l'équation différentielle $f'-f=0$. Cependant l'existence était admise et relève d'un résultat que vous ne verrez qu'en seconde année. Notre approche sera donc différente. Nous commençons par définir le logarithme et la fonction exponentielle constituera la réciproque du logarithme.
Nous verrons dans un prochain chapitre que si f est une fonction continue sur I un intervalle de $\mathbb{R}$ et si $a \in I$ alors $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f s'annulant en a. On appelle ce résultat le théorème fondamental de l'analyse. Nous allons revoir ce résultat dans un exemple particulier pour construire le logarithme.
Pour tout $p \in \mathbb{Z}\setminus\{1\}$, $x \mapsto x^p$ admet pour primitive la fonction $x \mapsto \frac{x^{p+1}}{p+1}$. Vous notez que seule la valeur $p=1$ pose problème. Pourtant la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Ceci peut-être une motivation pour introduire la définition suivante.

Définition I.1

On appelle **logarithme népérien**, notée ln, la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Remarques 1 :

- Par définition, $\ln(1) = \int_1^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = 0$.
- Historiquement le logarithme népérien a été introduit pour la qualité de ses propriétés algébriques transformant un produit en somme. En l'absence d'ordinateur, le calcul une somme est nettement plus aisé que le calcul d'un produit.

I.2 Continuité et dérivabilité

Proposition I.2

La fonction logarithme est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Démonstration. Faisons ensemble la continuité, je vous donnerai la démonstration de la dérivabilité.
Continuité. Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $h \in]-x; +\infty[$.

III.1 Exprimer $\ln(x+h) - \ln(x)$ sous forme d'une intégrale.

III.2 On suppose dans cette question que $h > 0$. En utilisant un encadrement adapté de la fonction inverse sur $[x; x+h]$, déduire de la question précédente que

$$0 \leqslant \ln(x+h) - \ln(x) \leqslant \frac{h}{x}.$$

III.3 On suppose dans cette question que $h < 0$. Montrer alors que

$$0 \geqslant \ln(x+h) - \ln(x) \geqslant \frac{h}{x}.$$

III.4 En déduire que, quelque soit le signe de h,

$$-\frac{|h|}{x} \leqslant \ln(x+h) - \ln(x) \leqslant \frac{|h|}{x}$$

III.5 Conclure que la fonction logarithme est continue en x.

$\square$