Pour lundi 22/10

I Se tester

Proposition I.1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a
$$\begin{cases} \omega \in \mathbb{U}_n \\ \omega \neq 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0.$$

Je vous ai proposé ce résultat du cours car il fallait l'utiliser dans l'exercice 1 question 2 du DS2. Parmi ceux qui on reconnut qu'il suffisait d'appliquer cette propriété pas UN SEUL (sur les deux classes) n'a pensé à préciser que $\omega \neq 1$ pour l'utiliser...

II S'entraîner

Soit $x \in \mathbb{R}$. On veut montrer
$$\lfloor x \rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor. \tag{$\bigstar$}$$

II.1 Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que
$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \leqslant \frac{x}{2} < \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \frac{1}{2}. \tag{1}$$

(a) On a
$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor &\leqslant \frac{x+1}{2} && \text{par définition de la partie entière} \\ &< \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} && \text{d'après (1)} \\ &= \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 1. \end{aligned}$$

Le nombre $\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor$ est un **entier** strictement plus petit que **l'entier** $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ plus 1 et donc
$$\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor \leqslant \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor.$$

D'autre part, on a également
$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor &> \frac{x+1}{2} - 1 && \text{par définition de la partie entière} \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \\ &\geqslant \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - \frac{1}{2} && \text{d'après (1).} \end{aligned}$$

Puisque $\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor$ et $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$, on en déduit que $\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor \geqslant \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$, ce qui conjointement avec l'inégalité réciproque démontrée plus haut nous permet de déduire que
$$\boxed{\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor.} \tag{2}$$

(b) A la lumière du résultat précédent (2), on a
$$(\bigstar) \quad \Leftrightarrow \quad \lfloor x \rfloor = 2 \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor.$$

Or d'après (1), on a $2\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \leqslant x < 2\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 1$ ce qui signifie exactement que $\lfloor x \rfloor = 2\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$.

$\boxed{\text{Conclusion, lorsque } \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \leqslant \frac{x}{2} < \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \frac{1}{2}, \text{ alors } (\bigstar) \text{ est vérifiée.}}$

II.2 On suppose maintenant que

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \frac{1}{2} \leqslant \frac{x}{2} < \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 1, \tag{3}$$

ce qui est l'unique autre possibilité par définition de $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$. Dans ce cas, on a d'une part,

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor &\leqslant \frac{x+1}{2} && \text{par définition de la partie entière} \\ &< \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 1 + \frac{1}{2} && \text{d'après (3).} \end{aligned}$$

Les nombres $\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor$ et $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 1$ étant entiers, on en déduit que $\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor \leqslant \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 1$.
D'autre part,

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor &> \frac{x+1}{2} - 1 && \text{par définition de la partie entière} \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \\ &\geqslant \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} && \text{d'après (3)} \\ &= \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \end{aligned}$$

donc $\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ et ces deux nombres étant des entiers, on en déduit que $\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor \geqslant \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 1$.
Ainsi on en déduit que $\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 1$. Donc lorsque (3) est vraie, on a

$$(\bigstar) \quad \Leftrightarrow \quad \lfloor x \rfloor = 2 \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 1.$$

Or d'après (3), $2 \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 1 \leqslant x < 2 \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 2$, c'est-à-dire $\lfloor x \rfloor = 2 \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 1$. Finalement $(\bigstar)$ est vérifiée dans ce second cas.

$\boxed{\text{Conclusion, pour tout } x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor.}$

III Complément de cours

Proposition III.1 (Formule de Leibniz)

Soient $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions n fois dérivables sur I. Alors la fonction fg est n fois dérivable et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

On fixe $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions n fois dérivables sur I. On pose pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$

$$\mathscr{P}(k) \ : \ \begin{cases} \text{la fonction } fg \text{ est } k \text{ fois dérivable} \\ (fg)^{(k)} = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)} \end{cases}$$

et l'on va montrer par récurrence que $\mathscr{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, on en déduire alors notamment que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

III.1 Si $k = 0$ alors fg est 0 fois dérivable, comme tout le monde et

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)} = \sum_{i=0}^{0} \binom{0}{i} f^{(i)} g^{(0-i)} = \binom{0}{0} f^{(0)} g^{(0)} = fg.$$

Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

III.2 Soit $k \in \{0, \dots, n-1\}$ (on ne prend pas n car alors si $k = n$, on ne pourra pas en déduire $\mathscr{P}(k+1)$). On suppose que $\mathscr{P}(k)$ est vraie.

(a) Par hypothèse, fg est k fois dérivable et $(fg)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)}$. Or pour tout $0 \leqslant i \leqslant k \leqslant n-1$, la fonction $f^{(i)}$ est dérivable car f est n fois dérivable. De même pour tout $0 \leqslant i \leqslant k$, on a$0 \leqslant k-i \leqslant k \leqslant n-1$ et donc la fonction $g^{(k-i)}$ est dérivable car g est n fois dérivable. On en déduit que la fonction $(fg)^{(k)}$ est dérivable comme combinaison linéaire de fonctions linéaires i.e. la fonction fg est $k+1$ fois dérivable.

(b) De plus,

$$(fg)^{(k+1)} = \left((fg)^{(k)}\right)' = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left[f^{(i)} g^{(k-i)}\right]'.$$

En appliquant la formule de la dérivation d'un produit,

$$\begin{aligned}(fg)^{(k+1)} = \left((fg)^{(k)}\right)' &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(\left(f^{(i)}\right)' g^{(k-i)} + f^{(i)} \left(g^{(k-i)}\right)'\right) \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(f^{(i+1)} g^{(k-i)} + f^{(i)} g^{(k-i+1)}\right).\end{aligned}$$

(c) On sépare la somme en deux,

$$(fg)^{(k+1)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i+1)} g^{(k-i)} + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i+1)}.$$

puis on effectue le changement de variable $j = i+1$ dans la première somme :

$$(fg)^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{k+1} \binom{k}{j-1} f^{(j)} g^{(k-j+1)} + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i+1)},$$

ce qui, quitte à revenir à la variable i à la place de j (qui est muette) est le résultat souhaité :

$$(fg)^{(k+1)} = \sum_{i=1}^{k+1} \binom{k}{i-1} f^{(i)} g^{(k-i+1)} + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i+1)}.$$

(d) On extrait le dernier terme de la première somme et le premier terme de la seconde somme :

$$\begin{aligned}(fg)^{(k+1)} &= \binom{k}{k} f^{(k+1)} g^{(k-(k+1)+1)} + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i-1} f^{(i)} g^{(k-i+1)} + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i+1)} + \binom{k}{0} f^{(0)} g^{(k+1)} \\ &= f^{(k+1)} g^{(0)} + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i-1} f^{(i)} g^{(k-i+1)} + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i+1)} + f^{(0)} g^{(k+1)}.\end{aligned}$$

Or par définition, $g^{(0)} = g$ et $f^{(0)} = f$, donc

$$(fg)^{(k+1)} = f^{(k+1)} g + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i-1} f^{(i)} g^{(k-i+1)} + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i+1)} + f g^{(k+1)}.$$

On regroupe alors les deux sommes :

$$(fg)^{(k+1)} = f^{(k+1)} g + \sum_{i=1}^{k} \left[\binom{k}{i-1} + \binom{k}{i}\right] f^{(i)} g^{(k-i+1)} + f g^{(k+1)}.$$

(e) D'après la formule de Pascal,

$$(fg)^{(k+1)} = f^{(k+1)} g + \sum_{i=1}^{k} \binom{k+1}{i} f^{(i)} g^{(k-i+1)} + f g^{(k+1)}.$$

Comme la formule de binôme de Newton, on fait apparaître le terme $i=0$ et le terme $i=k+1$:

$$\begin{aligned}(fg)^{(k+1)} &= \binom{k+1}{k+1} f^{(k+1)} g + \sum_{i=1}^{k} \binom{k+1}{i} f^{(i)} g^{(k-i+1)} + \binom{k+1}{0} f g^{(k+1)} \\ &= \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} f^{(i)} g^{(k-i+1)}\end{aligned}$$

Conclusion, la fonction fg est $k+1$ dérivable et $(fg)^{(k+1)} = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} f^{(i)} g^{(k-i+1)}$ i.e. $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

III.3 On a montré que $\mathscr{P}(0)$ est vraie et que pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, $(\mathscr{P}(k) \Rightarrow \mathscr{P}(k+1))$ donc par récurrence, pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie et notamment $\mathscr{P}(n)$ est vraie.