Pour Vendredi 02/11

I Se tester

I.1 Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{K}^2$, on a

$$||a| - |b|| \leqslant |a - b| \leqslant |a| + |b| \,.$$

I.2 Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

II S'entraîner

II.1 L'astuce est de voir que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{k}{(k+1)!}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right) = \sum_{k=0}^{n} (u_k - u_{k+1}) \,,$$

où pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = \frac{1}{k!}$. On reconnaît ainsi une somme télescopique et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = u_0 - u_{n+1} = \frac{1}{0!} - \frac{1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

On a donc montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.}$$

II.2 (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1; n]\!]$. Par définition de coefficient binomial, on a les égalités suivantes :

$$p\binom{n}{p} = p\frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(p-1)!(n-p)!} = \frac{n \times (n-1)!}{(p-1)!(n-1-(p-1))!} = n\binom{n-1}{p-1}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p \in [\![1; n]\!], \quad p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}.}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la question précédente, on en déduit que

$$\sum_{p=1}^{n} p\binom{n}{p} = \sum_{p=1}^{n} n\binom{n-1}{p-1}.$$

L'entier n ne dépendant pas de la variable de sommation, on obtient que

$$\sum_{p=1}^{n} p\binom{n}{p} = n\sum_{p=1}^{n} \binom{n-1}{p-1} = n\sum_{p=1}^{n} \binom{n-1}{p-1} 1^p 1^{n-1-p}.$$

On reconnaît dans la dernière expression la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{p=1}^{n} p\binom{n}{p} = n\,(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}.$$

III Complément de cours

Exercice 2. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Discuter suivant les valeurs de a de la limite de la suite $(\ln(a^n))_{n \in \mathbb{N}}$.
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le point 4 de la proposition I.4, on a

$$\ln(a^n) = n\ln(a).$$

- Si $a = 1$, alors par définition du logarithme, on a $\ln(a) = \ln(1) = 0$. Donc dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\ln\left(a^n\right) = n \ln(a) = 0.$$

- Si $a > 1$, alors par croissance STRICTE du logarithme, on obtient que $\ln(a) > \ln(1) = 0$. Ainsi,

$$\lim_{n \to +\infty} \ln\left(a^n\right) = \lim_{n \to +\infty} n \underbrace{\ln(a)}_{>0} = +\infty.$$

- Si $0 < a < 1$, alors, toujours par croissance STRICTE du logarithme, on a $\ln(a) < \ln(1) = 0$ et donc

$$\lim_{n \to +\infty} \ln\left(a^n\right) = \lim_{n \to +\infty} n \underbrace{\ln(a)}_{<0} = +\infty.$$

Conclusion :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \ln\left(a^n\right) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 1 \\ 0 & \text{si } a = 1 \\ -\infty & \text{si } a < 1 \end{cases}}$$