Pour mercredi 24/10

I Se tester

Soient a et b deux réels.

I.1 On a la linéarisation suivante $\boxed{\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}}$.

I.2 On a la factorisation suivante $\boxed{\sin(a)+\sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}$.

II S'entraîner

II.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{j}$. Puisque l'on ne sait pas calculer la somme des inverses, l'astuce est d'échanger l'ordre de sommation : sommer d'abord sur j puis sommer sur k. D'après le cours, on a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{j} = \sum_{1\leqslant k\leqslant j\leqslant n}\frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{j}.$$

Pour tout $j \in [\![1;n]\!]$, le terme $\frac{1}{j}$ ne dépend pas de la variable de sommation k et donc :

$$S_n = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j}1\right) = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\times j = \sum_{j=1}^{n}1 = n.$$

$\boxed{\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = n.}$

II.2 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n}(u_k - 2u_{k+1} + u_{k+2})$. In ne faut pas reconnaître une mais deux suites télescopiques :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(u_k - 2u_{k+1} + u_{k+2}) = \sum_{k=0}^{n}(u_k - u_{k+1} + u_{k+2} - u_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n}(u_k - u_{k+1}) + \sum_{k=0}^{n}(u_{k+2} - u_{k+1}).$$

Puisque les deux sommes obtenues sont télescopiques, on obtient

$$S_n = u_0 - u_{\boldsymbol{n+1}} + u_{n+2} - u_1.$$

$\boxed{\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N},\ S_n = u_0 - u_1 + u_{n+2} - u_{\boldsymbol{n+1}}.}$

III Complément de cours

Proposition VI.3

Soient $U \subseteq \mathbb{R}$, $V \subseteq \mathbb{R}$ et $f : U \to V$.

1. La fonction f est injective si et seulement s'il existe $g : V \to U$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_U$, c'est-à-dire telle que pour tout $x \in U$, $g \circ f(x) = x$.
2. La fonction f est surjective si et seulement s'il existe $g : V \to U$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_V$, c'est-à-dire telle que pour tout $y \in V$, $f \circ g(y) = y$.
3. La fonction f est bijective si et seulement s'il existe une unique fonction $g : V \to U$ telle que pour tout $g \circ f = \mathrm{Id}_U$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_V$.

III.1 On désire démontrer le point 2. Soit f une fonction surjective. Par définition, pour tout $y \in V$ il existe au moins un antécédent de y par f dans U. Pour chaque $y \in V$, on en choisit un (au hasard en fait peu importe lequel on choisit si jamais on a plusieurs antécédents possibles) noté x et on définit pour ce y et ce x, l'élément $g(y)$ par x. La fonction g est alors une fonction bien définie sur V et à valeurs dans V. Montrons que $f \circ g = \mathrm{Id}_V$. Soit $y \in V$, par définition de g, $g(y)$ existe et est UN antécédent de y par f. Par définition si $g(y)$ est un antécédent de y par f alors y est l'image de $g(y)$ par f ou encore : $f(g(y)) = y$. Ceci étant vrai pour tout $y \in V$, on en déduit que

$$f \circ g = \mathrm{Id}_V.$$

III.2 On souhaite montrer le point 3. On suppose maintenant que f est bijective. Montrons que la fonction g définie dans le paragraphe précédent vérifie également $g \circ f = \mathrm{Id}_U$. C'est le même principe que celui que l'on a appliqué en cours pour démontrer le point 1. Soit $x \in U$. Par définition d'un ensemble image, $f(x) \in f(U) \subseteq V$ (en fait puisque f est bijective, f est surjective i.e. $f(U) = V$). Posons $y = f(x)$. La fonction g est définie sur V et notamment sur $f(U)$ en associant à $y = f(x)$ un antécédent de $f(x)$ par f. Le nombre $g(y) = g(f(x))$ est donc UN antécédent de $y = f(x)$ par f. Or x est aussi un antécédent de $f(x)$ par f (ceci est vrai pour toute fonction, tout point est un antécédent de SON image). Les nombres $g(y)$ et x sont donc deux antécédents d'un même point y. Or la fonction f est bijective donc tout élément admet un UNIQUE antécédent. Par unicité de l'antécédent, $g(y) = x$. En d'autre terme $g(f(x)) = x$. Ceci étant vrai pour tout $x \in U$, on a

$$g \circ f = Id_U.$$