Pour vendredi 26/10

I Se tester

I.1 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en a. La tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f au point a est la droite d'équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

I.2 Soient $[a;b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et f $[a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction **continue** sur $[a;b]$. Pour tout réel y entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe (au moins) un élément $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = y$.

II S'entraîner

II.1 Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On remarque que $(a-b)^2 \geqslant 0$. Donc

$$a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0 \qquad \Rightarrow \qquad a^2 + b^2 \geqslant 2ab.$$

Ainsi,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leqslant a^2 + \left(a^2 + b^2\right) + b^2 = 2\left(a^2 + b^2\right).$$

II.2 Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On écrit que $(a+b)^4 = \left[(a+b)^2\right]^2$. D'après la question précédente,

$$0 \leqslant (a+b)^2 \leqslant 2\left(a^2+b^2\right).$$

En élevant au carré (sans changer l'ordre car les termes sont positifs), on obtient

$$(a+b)^4 \leqslant 4\left(a^2+b^2\right)^2.$$

En utilisant à nouveau la question précédente avec $a' = a^2$ et $b' = b^2$, on trouve que

$$(a+b)^4 \leqslant 4\left(a'+b'\right)^2 4 \times 2\left((a')^2 + (b')^2\right) = 8\left(a^4+b^4\right).$$

III Complément de cours

Exemple 52 : Démontrons que $f :]1;+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln\left(x^2-1\right)$ est une bijection et déterminons sa fonction réciproque. On pourrait montrer que f est injective puis surjective mais nous allons plutôt démontrer la bijectivité directement en montrant que l'équation suivante à $y \in \mathbb{R}$ et d'inconnu $x \in]1;+\infty[$ admet une et une seule solution :

$$y = f(x).$$

Soient $y \in \mathbb{R}$ et $x \in]1;+\infty[$. Raisonnons par équivalence :

$$\begin{aligned}
y = f(x) \quad &\Leftrightarrow \quad y = \ln\left(x^2-1\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^y = x^2 - 1 \qquad \text{car la fonction exponentielle (ou logarithme) est bijective} \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 = \mathrm{e}^y + 1 \\
&\Leftrightarrow \quad x = \sqrt{\mathrm{e}^y + 1} \qquad \text{car } x > 1 \text{ et } \mathrm{e}^y + 1 > 0.
\end{aligned}$$

Donc pour chaque $y \in \mathbb{R}$, on obtient une unique solution $\sqrt{\mathrm{e}^y+1}$. Vérifions que cette solution est dans $]1;+\infty[$: on a $\mathrm{e}^y > 0$ donc $\mathrm{e}^y + 1 > 1$ et donc $x = \sqrt{\mathrm{e}^y+1} > 1$.

Conclusion : la fonction f est une bijection de $]1;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ de plus sa fonction réciproque est donnée par :

$$f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R} & \to]1;+\infty[\\ y & \mapsto \sqrt{\mathrm{e}^y+1} \end{cases}$$

Proposition VI.5

Soient U et V deux parties de $\mathbb{R}$ et $f : U \to V$ une bijection. Le graphe de la fonction réciproque f^{-1}, $\Gamma_{f^{-1}}$ est le symétrique du graphe de f, Γ_f par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Démonstration. On admet le résultat suivant (qui peut faire l'objet d'un exercice sympathique, avis aux amateurs) : *Soient $M(x; y)$ et $M'(x'; y')$ deux points du plan. Les points M et M' sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ si et seulement si $x' = y$ et $y' = x$.*
Soient U et V deux parties de $\mathbb{R}$ et $f : U \to V$ une bijection. On note Γ_f le graphe de la fonction f.

- On pose $M \in \Gamma_f$ un point du graphe de f. Par définition de Γ_f, il existe $x \in U$ tel que les coordonnées de M soient $(x; f(x))$. On note M' le symétrique de M par la droite d'équation $y = x$. Par le résultat en italique ci-dessus, les coordonnées de M' sont $(f(x); x)$. Posons $y = f(x)$ et notons que $y \in V$ (par définition de f). Puisque f est bijective, on a également $x = f^{-1}(y)$. Ainsi les coordonnées de M' sont $\left(y; f^{-1}(y)\right)$, avec $y \in V$. Par conséquent, le point M' est un point de $\Gamma_{f^{-1}}$, le graphe de la fonction f^{-1} réciproque de f. Nous avons donc montré que tout point du graphe Γ_f a une image par la symétrie axiale $y = x$ appartenant à $\Gamma_{f^{-1}}$.
- Réciproquement si M' est un point de $\Gamma_{f^{-1}}$, on peut appliquer le premier point vraie pour toute fonction bijective à la fonction f^{-1}. On obtient que M'' le point image de M' par la droite d'équation $y = x$ est un point du graphe de la fonction $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$!(cf Remarque 51). On précise également que puisque M'' est l'image de M' par la symétrie axiale $y = x$ alors M' est l'image de M'' par cette même symétrie... Comment dire les rôles de M' et M'' par une symétrique axiale sont... symétriques ! Ceci nous permet d'affirmer que tout point M du graphe de f^{-1} est bien l'image d'un point du graphe de f. Ce qui achève la preuve.

$\square$