Pour mardi 30/10

I Se tester

I.1 Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{+} 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$. Posons $t = \tan(\theta/2)$, alors

$$\sin(\theta) = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \tan(\theta) = \frac{2t}{1-t^2}.$$

I.2 Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, alors

$$|z+z'|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) + |z'|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}\left(\overline{z}z'\right) + |z'|^2.$$

II S'entraîner

Soient z_1, z_2 et z_3 trois complexes vérifiant les propriétés suivantes.

1. Le produit des trois complexes vaut $4\sqrt{2}\,(-1+i)$.
2. Le complexe z_1 possède un argument dans $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.
3. Les modules de z_1, z_2 et z_3 sont, dans cet ordre, en progression géométrique de raison 2.
4. Les complexes z_1, z_2 et z_3 ont, dans cet ordre, des arguments en progression arithmétique de raison $\frac{\pi}{4}$.

Posons $z_1 = r\,e^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. D'après le point 2, on peut même prendre $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.
Par le point 3, on a $|z_2| = 2r$ et $|z_3| = 2\,|z_2| = 4r$.
Par le point 4, on a $\arg(z_2) = \theta + \frac{\pi}{4}$ et $\arg(z_3) = \arg(z_2) + \frac{\pi}{4} = \theta + \frac{\pi}{2}$.
On en déduit donc que $z_2 = 2r\,e^{i\theta + i\frac{\pi}{4}}$ et $z_3 = 4r\,e^{i\theta + i\frac{\pi}{2}}$ et par suite,

$$z_1 z_2 z_3 = r\,e^{i\theta} \times 2r\,e^{i\theta + i\frac{\pi}{4}} \times 4r\,e^{i\theta + i\frac{\pi}{2}} = 8r^3\,e^{3i\theta + i\frac{3\pi}{4}}$$

Ainsi, par le point 1,

$$\begin{aligned}
8r^3\,e^{3i\theta + i\frac{3\pi}{4}} = 4\sqrt{2}\,(-1+i) \quad &\Leftrightarrow \quad 8r^3\,e^{3i\theta + i\frac{3\pi}{4}} = 8\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad 8r^3\,e^{3i\theta + i\frac{3\pi}{4}} = 8\,e^{i\frac{3\pi}{4}} \\
&\Leftrightarrow \quad r^3\,e^{3i\theta} = 1 \qquad \text{car } r \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(r\,e^{i\theta}\right)^3 = 1.
\end{aligned}$$

Ainsi le point 1 implique que $z_1 = r\,e^{i\theta}$ est une racine troisième de l'unité et donc $r = 1$ et $\theta \in \left\{ \frac{2k\pi}{3} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$. Or $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ donc on en déduit que

$$\theta = \frac{2\pi}{3}.$$

Or nous avons vu que $z_2 = 2r\,e^{i\theta + i\frac{\pi}{4}}$ et $z_3 = 4r\,e^{i\theta + i\frac{\pi}{2}}$. Finalement,

$$\boxed{z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} \qquad z_2 = 2\,e^{i\frac{11\pi}{12}} \qquad z_3 = 4\,e^{i\frac{7\pi}{6}}.}$$

Bonus

Exemples 49 :

- Soit $f :]1; +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln\left(x^2 - 1\right)$.

II.1 **Méthode 1.** la fonction f est dérivable sur son ensemble de définition et pour tout $x \in]1; +\infty[$, on a

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}.$$

La fonction f' est donc strictement positive sur $]1;+\infty[$ et donc f est strictement croissante sur $]1;+\infty[$. Donc par le théorème de la bijection, la fonction f est une bijection de $]1;+\infty[$ dans $]\lim_{x\to1} f(x);\lim_{x\to+\infty} f(x)[$. Or

$$\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = \lim_{\substack{u\to0\\u>0}} \ln(u) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{u\to+\infty} \ln(u) = +\infty.$$

Par conséquent, f est une bijection de $]1;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ et est donc notamment surjective sur $\mathbb{R}$.
Méthode 2. Soient $x \in]1;+\infty[$ et $y \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} y = f(x) \quad &\Leftrightarrow \quad y = \ln\left(x^2-1\right) \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^y = x^2-1 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 = \mathrm{e}^y+1 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{\mathrm{e}^y+1} \qquad \text{car } \mathrm{e}^y+1>0. \end{aligned}$$

Or $x > 1$ donc
$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{\mathrm{e}^y+1}.$$

Donc pour tout élément de $y \in \mathbb{R}$, on a trouvé un antécédent par f : $x = \sqrt{\mathrm{e}^y+1}$ qui est bien dans $]1;+\infty[$ (par positivité de l'exponentielle et croissance de la fonction racine carrée) la fonction f est donc surjective. Mieux pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a trouvé un unique antécédent.

Conclusion, f est une bijection de $]1;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ et
$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f^{-1}(y) = \sqrt{\mathrm{e}^y+1}.$$

III Complément de cours

I.2 Continuité et dérivabilité

Proposition I.2

La fonction logarithme est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Démonstration. Faisons ensemble la continuité, je vous donnerai la démonstration de la dérivabilité.
Continuité. Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $h \in]-x;+\infty[$.

III.1 Par définition de la fonction logarithme, on a
$$\ln(x+h)-\ln(x) = \int_1^{x+h} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^{x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{x+h} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \int_x^{1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Par la relation de Chasles pour les intégrales,
$$\ln(x+h)-\ln(x) = \int_x^{x+h} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

III.2 On suppose que $h > 0$. Pour tout $t \in [x;x+h] \subseteq]0;+\infty[$ on a par décroissance de la fonction inverse,
$$\frac{1}{x+h} \leqslant \frac{t}{\leqslant}\frac{1}{x}.$$

En intégrant cette inégalité (et par croissance de l'intégrale),
$$\int_x^{x+h} \frac{1}{x+h}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{x+h} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{x+h} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}t.$$

Or $\frac{1}{x+h}$ ne dépendent pas de la variable d'intégration, donc

$$\int_x^{x+h} \frac{1}{x+h}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x+h}\int_x^{x+h} 1\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x+h}\,(x+h-x) = \frac{h}{x+h}.$$

De même,

$$\int_x^{x+h} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_x^{x+h} 1\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\,(x+h-x) = \frac{h}{x}.$$

Par conséquent,

$$\frac{h}{x+h} \leqslant \int_x^{x+h} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{h}{x}$$

Nous avons été trop précis. Grossissons l'inégalité en remarquant que $\frac{h}{x+h} \geqslant 0$ et donc en utilisant la question 1,

$$0 \leqslant \ln(x+h) - \ln(x) \leqslant \frac{h}{x}.$$

III.3 On suppose maintenant que $h < 0$. On procède de même : pour tout $t[x+h;x] \subseteq]0;+\infty[$, on a $\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{x+h}$. Donc

$$\int_{x+h}^{x} \frac{1}{x+h}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{x+h}^{x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{x+h}^{x} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}t.$$

Or $\int_{x+h}^{x} \frac{1}{x+h}\,\mathrm{d}t = \frac{x-(x+h)}{x+h} = -\frac{h}{x+h}$ et $\int_{x+h}^{x} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}t = -\frac{h}{x}$. Donc

$$-\frac{h}{x+h} \leqslant \int_{x+h}^{x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant -\frac{h}{x}.$$

Or d'après la question 1, $\int_{x+h}^{x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = -\int_{x}^{x+h} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = -\left(\ln(x+h) - \ln(x)\right)$. D'où

$$-\frac{h}{x+h} \leqslant -\left(\ln(x+h) - \ln(x)\right)\mathrm{d}t \leqslant -\frac{h}{x} \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \geqslant \frac{h}{x+h} \geqslant \ln(x+h) - \ln(x)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{h}{x}.$$

III.4 Si $h > 0$, on a vu que $0 \leqslant \ln(x+h) - \ln(x) \leqslant \frac{h}{x}$. Or $-\frac{|h|}{x} = \leqslant 0$ et $\frac{|h|}{x} = \frac{h}{x}$. Donc $-\frac{|h|}{x} \leqslant \ln(x+h) - \ln(x) \leqslant \frac{|h|}{x}$.
Si $h < 0$, on a $0 \geqslant \ln(x+h) - \ln(x)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{h}{x}$, $\frac{|h|}{x} \geqslant 0$ et $\frac{h}{x} = -\frac{|h|}{x}$ donc $-\frac{|h|}{x} \leqslant \ln(x+h) - \ln(x) \leqslant \frac{|h|}{x}$.
Par conséquent pour tout h (l'inégalité reste vraie si $h = 0$)

$$-\frac{|h|}{x} \leqslant \ln(x+h) - \ln(x) \leqslant \frac{|h|}{x}$$

III.5 On a

$$\lim_{h\to 0} -\frac{|h|}{x} = 0 = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{x}.$$

Donc par encadrement,

$$\lim_{h\to 0} \ln(x+h) - \ln(x) = 0.$$

La fonction logarithme est donc bien continue en x.

Maintenant que l'on s'est échauffé voici la démonstration de la dérivabilité de la fonction logarithme :
Dérivabilité. On affine nos précédentes inégalités. Fixons $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $h \in]-x;+\infty[\setminus\{0\}$, notons d'abord que $\frac{1}{x} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}t$. Ainsi,

$$\frac{1}{x} - \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \frac{1}{x} - \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \frac{t-x}{tx}\,\mathrm{d}t.$$

Donc, si $h > 0$, $0 \leqslant t - x \leqslant h$ pour tout $t \in [x;x+h]$. Or $hxt > 0$ pour tout $t \in [x;x+h]$ Donc

$$0 \leqslant \frac{1}{x} - \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} \leqslant \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \frac{h}{tx}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_x^{x+h} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Or nous avons déjà vu que pour $h > 0$, $\int_x^{x+h} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{h}{x}$. Donc

$$0 \leqslant \frac{1}{x} - \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} \leqslant \frac{h}{x^2}.$$

En procédant de même, on peut montrer que, si $h < 0$,

$$0 \geqslant \frac{1}{x} - \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} \geqslant \frac{h}{x^2}.$$

Donc globalement, pour tout $h \in]-x;+\infty[\setminus\{0\}$,

$$-\frac{|h|}{x^2} \leqslant \frac{1}{x} - \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} \leqslant \frac{|h|}{x^2}$$

Et par encadrement, on en déduit que

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} \right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \frac{1}{x}.$$

Donc la fonction logarithme est dérivable et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

$\square$