Feuille d'exercices 15
Suites numériques

Exercice 1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergentes. Etudier $\lim\limits_{n\to+\infty} \max(u_n, v_n)$.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergeant respectivement vers l et l' avec $l < l'$. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $u_n < v_n$.

Exercice 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$.

1. Montrer que si $l < 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
2. Montrer que si $l > 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
3. Montrer que si $l = 1$, on ne peut rien conclure.

Exercice 4. Déterminer, si elle existe, la limite des suites suivantes.

1. $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
2. $u_n = \frac{n-\sqrt{n^2+1}}{n+\sqrt{n^2+1}}$
3. $u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n k$
4. $u_n = \sqrt[n]{n^2}$
5. $u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$
6. $u_n = \frac{\sin(n)}{n+(-1)^{n+1}}$
7. $u_n = \frac{n!}{n^n}$
8. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2+k^2}$
9. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$
10. $u_n = \sqrt[n]{2 + (-1)^n}$

Exercice 5. Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$

Exercice 6. Déterminer la limite de la suite de terme général

$$u_n = \frac{1}{n!}\left(1! + 2! + \cdots + n!\right).$$

Exercice 7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de limite l. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{\sum_{i=1}^n u_i}{n}$

1. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{2n} \geqslant \frac{v_n+u_n}{2}$.
3. En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

Exercice 8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = +\infty$.

Exercice 9. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ La suite de terme général $u_n = (1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)$ avec $0 < a < 1$.

1. Montrer que la suite est croissante.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 + x \leqslant e^x$.
3. En déduire que la suite est convergente.

Exercice 10. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle croissante telle que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 11. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle (ou complexe) telle que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 12. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites déterminées par $u_0 = 1,\ v_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = 2u_n + 3v_n$$

1. Montrer que la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
2. Prouver que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.
3. Exprimer les termes généraux des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 13. Donner l'expression des suites récurrentes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

1. $u_0 = 1,\ u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
2. $u_0 = 1,\ u_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ 2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$.
3. $u_0 = 1,\ u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.
4. $u_0 = 0,\ u_1 = 1 + 4i$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = (3 - 2i)u_{n+1} - (5 - 5i)u_n$.

Exercice 14. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer $A^2 + 2A - 3I_3$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$ tels que $A^n = \alpha_n A + \beta_n I_3$. Donner une relation de récurrence entre $\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}$ et α_n, β_n.
3. Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. En déduire l'expression de α_n en fonction de n.
4. Donner A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.
5. Montrer que A est inversible et donner A^{-1}.
6. Vérifier que la formule obtenue pour A^n est valable pour $n = -1$. Est-elle valable pour tout $n \in \mathbb{Z}$?

Exercice 15. Soit $\theta \in]0, \pi[$. Déterminer le terme général de la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 2\cos\theta u_{n+1} + u_n = 0$$

Exercice 16. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n}$.

1. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. On souhaite montrer que les suites $(w_n = u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n = u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes :
   (a) Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$
   $$|w_{n+1} - t_{n+1}| \leqslant \frac{1}{4}|w_n - t_n|$$
   (c) En déduire que les suites $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
4. Résoudre l'équation $x = \frac{1}{1+x}$ et en déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 17. On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $0 < u_0 < v_0$ et

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n+v_n} \\ v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n+v_n} \end{cases}$$

Montrer que les suites sont convergentes et calculer leurs limites.

Exercice 18. Etudier les suites définie par

1. $u_0 = a \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2$
2. $u_0 \geqslant 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \ln(u_n)$
3. $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2+u_n}$

Exercice 19. Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \sqrt{12 - u_n}.$$

Exercice 20. Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n} + 35.$$

Exercice 21. Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = u_n(1 + u_n).$$

Exercice 22. Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \sqrt{8 + \frac{u_n^2}{2}}.$$

Exercice 23. Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 \neq 1$ et la relation $u_{n+1} = \frac{1+u_n^2}{-1+u_n}$

Exercice 24. Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et la relation $u_{n+1} = \frac{u_n+3}{2u_n}$

Exercice 25. Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et la relation $u_{n+1} = 2 + \ln(u_n)$

Exercice 26. Etudier la suite (u_n) définie par la relation $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{u_n}$

Exercice 27. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E_n :\ x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$.

1. Montrer que l'équation E_n possède une unique solution x_n dan $[1/2, 1]$.
2. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
3. Déterminer la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 28. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E_n :\ x^n \ln(x) = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que l'équation E_n admet une solution unique x_n et que $x_n \geqslant 1$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 1.

Exercice 29. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels décroissante et de limite nulle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$.
Montrer que les suites extraites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et en déduite que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 30. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note x_n l'unique solution de l'équation $x^5 + nx - 1 = 0$.

1. Montrer que le suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Etudier la monotonie de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ puis donner un développement asymptotique de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à la précision $\frac{1}{n^{16}}$.