Feuille d'exercices 17
Espaces Vectoriels

Combinaisons linéaires

Exercice 1.

1. Dans $\mathbb{R}^3$, $(5,5,1)$ est-il combinaison linéaire de $(1,2,3)$ et $(3,1,2)$?
2. Dans $\mathbb{R}[X]$, $16X^3-7X^2+21X-4$ est-il combinaison linéaire de $8X^3-5X^2+1$ et X^2+7X-2 ?
3. Dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $x\mapsto\cos^2(x)$ est-il combinaison linéaire de $x\mapsto 1$ et $x\mapsto\cos(2x)$?
4. Dans $\mathbb{R}^3$, $x\mapsto\sin(2x)$ est-elle combinaison linéaire de sinus et cosinus ?

Sous-espaces vectoriels

Exercice 2. Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

1. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\leqslant y\}$
2. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=y\}$
3. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy=0\}$
4. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y=1\}$

Exercice 3. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,

1. L'ensemble des suites convergentes.
2. L'ensemble des suites divergentes.
3. L'ensemble des suites arithmétiques
4. L'ensemble des suites monotones.
5. $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et $E=\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n\}$.

Exercice 4. Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

1. Les fonctions monotones.
2. Les fonctions qui s'annulent en 0.
3. Les fonctions qui s'annulent
4. Les fonctions impaires.

Intersection et somme de sous-espaces vectoriels

Exercice 5. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que

$$F\cap G=F+G \qquad \Leftrightarrow \qquad F=G$$

Exercice 6. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces de E. Montrer que

1. $F\setminus G$ n'est pas un sous espace vectoriel de E.
2. $F\cup G$ est un sous-espace vectoriel de $E \Leftrightarrow F\subseteq G$ ou $G\subset F$.
3. Soient H un troisième sous-espace vectoriel de E. Prouver que

$$G\subset F \Rightarrow F\cap(G+H)=G+(F\cap H).$$

Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Exercice 7. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E pour :

1. $E=\mathbb{R}^3$, $F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-y+3z=0\right\}$ et $G=\mathrm{Vect}\left((1,0,1)\right)$.
2. $E=\mathbb{R}^4$, $F=\mathrm{Vect}\left((1,1,1,1),(2,1,0,-1)\right)$ et $G=\mathrm{Vect}\left((0,1,1,0),(-1,0,1,-1)\right)$.
3. $E=\mathbb{K}_n[X]$, $F=\mathbb{K}_{n-1}[X]$ et $G=\mathrm{Vect}(1+X+\cdots+X^n)$.
4. $E=\mathbb{K}[X]$, $F=\{P\in\mathbb{K}[X] \mid P(0)=P'(0)=0\}$ et $G=\{aX+b \mid a,b\in\mathbb{K}\}$.

Exercice 8. Soit $H=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid x_1+\cdots+x_n=0)\}$ et $u=(1,\dots,1)$. Montrer que H et $\mathrm{Vect}(u)$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 9. Montrer que dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, les ensembles $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ des fonctions respectivement paires et impaires sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Exercice 10. On se place dans E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On considère $F=\{f\in E \mid f''+f=0\}$ et $G=\{f\in E \mid f(0)=f(1)=0\}$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 11. Soient $F=\left\{f\in\mathscr{C}([-1,1],\mathbb{R}) \mid \int_{-1}^{1}f(t)dt=0\right\}$ et $G=\{f\in\mathscr{C}([-1,1],\mathbb{R}) \mid f$ est constante$\}$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathscr{C}([-1,1],\mathbb{R})$.

Exercice 12. On définit les trois sous-espaces suivants de $E=\mathbb{K}_3[X]$:

$$F=\{P\in E \mid P(0)=P(1)=P(2)=0\}$$
$$G=\{P\in E \mid P(1)=P(2)=P(3)=0\}$$
$$H=\{P\in E \mid P(X)=P(-X)\}.$$

1. Montrer que $F\oplus G=\{P\in E \mid P(1)=P(2)=0\}$
2. Montrer que $E=F\oplus G\oplus H$.

Famille libre, famille liée, famille génératrice

Exercice 13. Dire si les familles suivantes sont libres ou liées. Fournir des relations de dépendance linéaire quand ces relations existent.

1. $((1,1),(1,2))$ dans $\mathbb{R}^2$.
2. $((2,3),(-6,9))$ dans $\mathbb{R}^2$.
3. $((1,3,1),(1,3,0),(0,3,1))$, dans $\mathbb{R}^3$.
4. $((1,3),(-1,-2),(0,1))$, dans $\mathbb{R}^2$.
5. $((3,0,1,-2),\ (1,5,0,-1),\ (7,5,2,1))$, dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 14. Les familles suivantes sont-elles génératrices ?

1. $((1,1),(3,1))$ dans $\mathbb{R}^2$.
2. $((1,0,2),(1,2,1))$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. $((1,0,1),(1,1,1),(1,2,3),(3,2,1))$ dans $\mathbb{R}^3$

Exercice 15. Les familles suivantes sont-elles libres dans $\mathbb{R}^3$?

1. $(u,v) \in (\mathbb{R}^3)^2$ avec $u=(1,0,1)$ et $v=(1,1,0)$.
2. $(u,v,w) \in (\mathbb{R}^3)^3$ avec $u=(1,0,0)$, $v=(1,1,0)$ et $w=(1,1,1)$.
3. $(u,v,w) \in (\mathbb{R}^3)^3$ avec $u=(2,1,1)$, $v=(1,-1,2)$ et $w=(1,2,-1)$.

Exercice 16. Soit la famille d'applications $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant 4}$ de $\mathscr{C}([0,2\pi],\mathbb{R})$ définie pour tout $x\in[0,2\pi]$ par :

$$f_1(x)=\cos(x),\ f_2(x)=x\cos(x),\ f_3(x)=\sin(x) \text{ et } f_4(x)=x\sin(x)$$

Montrer que cette famille est libre.

Exercice 17. Pour tout entier $0\leqslant k\leqslant n$, on pose $f_k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f_k(x)=\mathrm{e}^{kx}$. Montrer que la famille $(f_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une famille libre de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 18. Montrer que

$$\mathbb{R}_2[X]=\mathrm{Vect}((X-1)^2,(X-1)(X+1),(X+1)^2)$$

Exercice 19. Soit $(u_1,\dots,u_n)$ une famille libre d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E et $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{K}^n$. On pose $u=\sum_{i=1}^n a_iu_i$. On définit la famille $(v_1,\dots,v_n)$ par, $\forall i\in\{1,\dots,n\}$, $v_i=u_i+u$. A quelle condition sur les scalaires a_i la famille $(v_1,\dots,v_n)$ est-elle libre ?

Bases

Exercice 20. Soit $S=(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)=((1,1,1),(1,1,2),(1,2,3))$ une famille de $E=\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que S est une base de E.
2. Calculer les coordonnées de $\mathbf{v}=(5,7,12)$ dans cette base.

Exercice 21. Montrer que les vecteurs $(1,1,1)$, $(-1,1,0)$, $(1,0,-1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer les coordonnées respectives des vecteurs $(1,0,0)$, $(1,0,1)$ et $(0,0,1)$ dans cette base.

Exercice 22. Déterminer pour quelles valeurs de $t\in\mathbb{R}$ les vecteurs $(1,0,t)$, $(1,1,t)$, $(t,0,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 23. Déterminer pour quelles valeurs de $t\in\mathbb{R}$ les polynômes $X^2+t/2$, $X-t$, $(X+t+1)^2$ forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 24. On définit dans $\mathbb{R}^4$ les sous-ensembles suivants :

$$F=\mathrm{Vect}((1,2,-1,0),(0,1,1,1)),\ G=\mathrm{Vect}((1,1,-2,-1),(2,-1,-1,1)$$

$$H=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t=0\},\ K=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid {\scriptstyle 2x-y+2z+t=0 \atop x-y+z-t=0}\right\}$$

1. Montrer que F,G,H et K sont des sous espaces vectoriels.
2. Déterminer une base de de H et une base de F.
3. Déterminer une base de $F\cap G$, de $F\cap H$ et de $H\cap K$.

Exercice 25. Soit $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\}$ et $G=\{(a-b,a+b,a-3b)\in\mathbb{R}^3 \mid (a,b)\in\mathbb{R}^2\}$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer des bases de $F,G,F\cap G$ et $F+G$.

Exercice 26. Dans chacun des cas suivants, déterminer si la famille est une base de E. Si c'est le cas, donner les coordonnées du vecteur x dans cette base.

1. $E=\mathbb{R}^3$, $\mathscr{F}=((-1,1,1);(1,-1,1);(1,1,-1)))$ et $x=(2,3,4)$.
2. $E=\mathbb{R}_3[X]$, $\mathscr{F}=(1;X;X(X-1);X(X-1)(X-2))$ et $x=X^3$.
3. $E=\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathscr{F}=\left(\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0&2\\3&-1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2&-2\\1&-1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0&-2\\-10&4\end{pmatrix}\right)$ et $x=I_4$.
4. $E=\left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n\geqslant 4,\ u_n=0\right\}$ et $x=(-2,3,4,0,0,\dots)$.

Exercice 27. Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer une base et un supplémentaire des sous-espace suivants :

1. $F=\mathrm{Vect}(u,v)$ avec $u=(1,1,0)$ et $v=(2,1,1)$.
2. $F=\mathrm{Vect}(u,v,w)$ avec $u=(-1,1,0)$, $v=(2,0,1)$ et $w=(1,1,1)$.
3. $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-2y+3z=0\}$.

Exercice 28.

1. Soient $e_1=(1,1,1)$, $e_2=(1,1,0)$ et $e_3=(0,1,1)$ Montrer que $\mathscr{C}=(e_1,e_2,e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que la famille $((1,2,-1,3),(2,1,-1,-1))$ est libre dans $\mathbb{R}^4$. Compléter cette famille en une base de $\mathbb{R}^4$.
3. Montrer que la famille de $((1,0,1),(1,1,1),(1,2,3),(3,2,1),(1,-1,1))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$. En extraire une base de $\mathbb{R}^3$.