Feuille d'exos 19
Applications linéaires

Généralités

Exercice 1.
Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires :

1. $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto 2x^2$.
2. $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto 4x - 3$
3. $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \sqrt{x^2}$
4. $f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ (x, y) \mapsto (y, x)$
5. $f_5 : \mathcal{C}^0([0,1]) \to \mathcal{C}^0([0,1]);\ f \mapsto \left(t \mapsto \frac{f(t)}{1+t^2}\right)$
6. $f_6 : \mathcal{C}^0([0,1]) \to \mathbb{R};\ f \mapsto f(3/4)$
7. $f_7 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ (x, y) \mapsto 3x + 5y$
8. $f_8 : \mathcal{C}^0([0,1]) \to \mathbb{R};\ f \mapsto f(1/4) - \int_{1/2}^1 f(t)\,dt$
9. $f_9 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ (x, y) \mapsto \sin(3x + 5y)$
10. $f_{10} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ (x, y) \mapsto xy$
11. $f_{11} : \mathcal{C}'([0,1]) \to \mathbb{R};\ f \mapsto \int_0^1 \ln(1 + |f(t)|)\,dt$
12. $f_{12} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3;\ x \mapsto (2x, x/\pi, x\sqrt{2})$
13. $f_{13} : \mathcal{C}^0([0,1]) \mapsto \mathcal{C}^1([0,1]);\ f \to \left(x \mapsto e^{-x} \int_0^1 f(t)dt\right)$
14. $f_{14} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R};\ (x, y) \to \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{si } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
15. $f_{15} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2;\ (x, y, z) \mapsto (2x - 3y + z, x - y + z/3)$
16. $f_{16} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ (x, y) \mapsto$ la solution du système d'équations $\begin{cases} 3u - v &= x \\ 6u + 2v &= y. \end{cases}$
17. $f_{17} : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) : f \mapsto (x \mapsto f'(x) + f(x) \cdot \sin x)$

Exercice 2. Soit $\varphi : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $\varphi(f) = f'' - 3f' + 2f$. Montrer que φ est un endomorphisme et préciser son noyau.

Exercice 3. Soient E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E. Montrer que

1. $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}\,(f) = \{0_E\} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(f^2)$
2. $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f) \quad \Leftrightarrow \quad E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}\,(f)$

Exercice 4. Soit u et v deux endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que

$$v(\mathrm{Im}(u)) \subseteq \mathrm{Im}(u), \quad \text{et} \quad v(\mathrm{Ker}\,(u)) \subseteq \mathrm{Ker}\,(u)$$

On dit que $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}\,(u)$ sont stables par v.

Application linéaire en dimension finie

Exercice 5. Justifier qu'il existe une unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que

$$f(1,0,0) = (0,1),\ f(1,1,0) = (1,0) \text{ et } f(1,1,1) = (1,1)$$

Donner l'expression de $f(x, y, z)$ en fonction de x, y, z et déterminer l'image et le noyau de f. Vérifier le théorème du rang.

Exercice 6. Montrer que les applications suivantes sont linéaires et déterminer leurs noyaux et images :

1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y)$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z, t) = (2x + y + z, x + y + t, x + z - t)$.
3. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z + i\bar{z}$. ($\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel).

Exercice 7. Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ définie par $f(x, y) = (2x - 3y, x + y)$. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et déterminer son application réciproque.

Exercice 8. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ une application injective avec E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Montrer que pour toute famille $(u_1, \ldots, u_n)$ de vecteurs de E, on a

$$\mathrm{rg}(f(u_1), \ldots, f(u_n)) = \mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_n)$$

Exercice 9. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, V un sous-espace vectoriel de E et f un endomorphisme de E. Montrer que $V \subseteq f(V) \ \Rightarrow\ f(V) = V$.

Exercice 10. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et f un endomorphisme nilpotent non nul de E i.e. il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Supposons que p est le plus petit entier tel que $f^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

1. Soit $u \in E$. Montrer que la famille $(u, f(u), f^2(u), \ldots, f^{p-1}(u))$ est libre si et seulement si $u \notin \mathrm{Ker}\,\left(f^{p-1}\right)$.
2. En déduire que $p \leqslant n$ puis que $f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
3. Si $n = p$, déterminer le rang de f.

4. On considère la dérivation sur $E=\mathbb{R}_n[X]$. Proposer un $u\in E$ vérifiant les conditions de la question 1.

Exercice 11. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes

$$1)\ E=\mathrm{Im}(f)\oplus \mathrm{Ker}\,(f) \qquad 2)\ \mathrm{Im}(f^2)=\mathrm{Im}(f) \qquad 3)\ \mathrm{Ker}\,(f)=\mathrm{Ker}\,(f^2).$$

Exercice 12. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f et g deux endomorphismes de E. Montrer que $\mathrm{rg}(f+g)\leqslant \mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g)$ puis que $|\mathrm{rg}(f)-\mathrm{rg}(g)|\leqslant \mathrm{rg}(f-g)$.

Exercice 13. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n\geqslant 1$ et f un endomorphisme. Pour tout $p\in\mathbb{N}$, on pose $I_p=\mathrm{Im}(f^p)$ et $N_p=\mathrm{Ker}\,(f^p)$.

1. Montrer que $(I_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et que $(N_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante (pour l'inclusion).
2. Montrer qu'il existe $s\in\mathbb{N}$ tel que $I_{s+1}=I_s$ et $N_{s+1}=N_s$.
3. Soit r le plus petit entier vérifiant la propriété précédente. Montrer que pour tout $s\geqslant r$, on a $I_s=I_r$ et $N_s=N_r$.
4. Montrer que I_r et N_r sont supplémentaires dans E.

Exercice 14. Soient E une $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $f\in\mathscr{L}(E)$. Montrer que

$$\mathrm{Ker}\,(f)=\mathrm{Im}(f) \qquad \Leftrightarrow \qquad \left[f^2=0 \text{ et } n=2\mathrm{rg}(f)\right]$$

Exercice 15. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $2n$ et f un endomorphisme de E tel que $f\circ f=0$. On suppose que il existe $u_1,\dots,u_n\in E$ tels que $(f(u_1),\dots,f(u_n))$ est une famille libre.

1. Démontrer que $\mathrm{rg}(f)\geqslant n$.
2. Prouver que la famille $(u_1,\dots,u_n)$ est libre.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(f)=\mathrm{Im}(f)$.
4. Démontrer que $\mathrm{Ker}\,(f)$ et $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_n)$ sont supplémentaires dans E.

Applications linéaires et suites

Exercice 16. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles. Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on définit les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad v_n=u_{n+1} \qquad \text{et} \qquad w_n=\begin{cases}0 & \text{si } n=0\\ u_{n-1} & \text{sinon}\end{cases}$$

1. Montrer que les applications
$$f:\begin{array}{ccc}E&\to&E\\(u_n)_{n\in\mathbb{N}}&\mapsto&(v_n)_{n\in\mathbb{N}}\end{array} \qquad \text{et} \qquad g:\begin{array}{ccc}E&\to&E\\(u_n)_{n\in\mathbb{N}}&\mapsto&(w_n)_{n\in\mathbb{N}}\end{array}$$
sont des endomorphismes de E.
2. Etudier l'injectivité et la surjectivité de f et g.

Exercice 17. Soit $F=\{(u_n)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\mid \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+3}=u_n\}$.

1. Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
2. Soit $f:F\to\mathbb{C}^3;(u_n)\mapsto(u_0,u_1,u_2)$. Démontrer que F est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En déduire la dimension de F.
3. Déterminer une base de F constituée de suites géométriques.
4. Soit $g:\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\to\mathbb{C}^{\mathbb{N}};\ (u_n)\mapsto(v_n)$ avec $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n=\frac{u_n+u_{n+1}+u_{n+2}}{3}$.
   (a) Démontrer que $\tilde{g}$ la restriction de g à F est un endomorphisme de F.
   (b) Déterminer le noyau et l'image de cet endomorphisme.

Applications linéaires et polynômes

Exercice 18. Soit $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_n[X]&\to&\mathbb{R}_n[X]\\P&\mapsto&P(X)-P(X+1)\end{array}$.

a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
b) Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer le degré de $f(P)$ en fonction du degré de P.
c) Déterminer le noyau de f.
d) Montrer que $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Exercice 19. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $f:\mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}_n[X];\ P(X)\mapsto P(X+1)+P(X)$

1. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que pour tout $k=0,\dots,n$ il existe un unique $E_k\in\mathbb{R}_n[X]$ tel que $E_k(X+1)+E_k(X)=X^k$.
3. Montrer que pour tout $k=1,\dots,n$, $E_k=kE_{k-1}$.

Applications linéaires et intégrales

Exercice 20. Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère $\phi, \psi \in \mathscr{F}(E)$ définie par : pour tout $f \in E$

$$\phi(f) = f' \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \psi(f)(x) = \int_0^x f(t)d(t)$$

1. Montrer que ϕ et ψ sont des endomorphismes de E.
2. calculer $\phi \circ \psi$ et $\psi \circ \phi$.
3. Déterminer images et le noyaux de ϕ et ψ.

Exercice 21. Soit $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$. Pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$, on définit la fonction $\Phi(f)$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \Phi(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \Phi(f)(0) = f(0).$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de E.
2. Φ est-il injectif ? Surjectif ?

Exercice 22. Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et

$$T : \begin{cases} E & \to E \\ f & \mapsto T(f) \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad T(f) : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \int_0^{3x} f(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

1. Montrer que $T \in \mathcal{L}(E)$.
2. Soit f dans E, montrer que $T(f)$ est dérivable. Quelle est sa dérivée ?
3. T est-elle surjective ? Injective ?

Exercice 23. Soit $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ et soit φ l'application définie pour tout $f \in E$ par $\varphi(f) = g$ avec :

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \int_x^{x+1} f(t)dt.$$

1. Démontrer que φ est un endomorphisme de E.
2. Etudier l'injectivité et la surjectivité de φ.
3. Montrer que si f est bornée alors $\varphi(f)$ aussi.
4. Montrer que si $f \in E$ admet une limite l en $+\infty$ alors $\varphi(f)$ tend également vers l en $+\infty$.

Application linéaire et matrices

Exercice 24. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \to & AM. \end{array}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 25. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \to & \frac{M + {}^tM}{2}. \end{array}$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}\,(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
3. Montrer que f est un projecteur i.e. que $f \circ f = f$.
4. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires.

Exercice 26. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et

$$f_A : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & AM - MA. \end{array}$$

1. Montrer que f_A est un endomorphisme.
2. Déterminer $\mathrm{Im}(f_A)$ pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$