# Feuille d'exercices 2
# Trigonométrie

## Formulaire

**Exercice 1**. Soient $a$, $b$, et $c$ trois réels tels que les quantités suivantes soient bien définies. Développer

1. $\cos(3a)$
2. $\tan(a+b+c)$

**Exercice 2**. Linéariser $\cos^2(x)\sin^3(x)$.

**Exercice 3**.

1. En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
2. En déduire $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)$.

**Exercice 4**. Linéariser $\cos^6(x)$ et en déduire une linéarisation de $\sin^6(x)$.

**Exercice 5**. Soit $(p,q) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\sin(p)+\sin(q) \neq 0$. Simplifier l'expression $\frac{\cos(p)-\cos(q)}{\sin(p)+\sin(q)}$. En déduire $\tan\left(\frac{\pi}{24}\right)$.

**Exercice 6**. Soit $P = \sin\left(\frac{\pi}{14}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{14}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{14}\right)$. Démontrer que $P = \frac{1}{8}$.
*Indication : gardez les angles entre* $0$ *et* $\frac{\pi}{4}$ *et n'utiliser que les formules* $\cos(2x) = \dots$ *et* $\sin(2x) = \dots$.

**Exercice 7**. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \not\equiv 0\ [\pi]$. On pose

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} \cos^2(kx) = \cos^2(x) + \cos^2(2x) + \dots + \cos^2(nx)$$

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} \sin^2(kx) = \sin^2(x) + \sin^2(2x) + \dots + \sin^2(nx).$$

1. Calculer $I_n + J_n$ et vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$I_n - J_n = \frac{\sin((2n+1)x) - \sin(x)}{2\sin(x)}.$$
2. En déduire les valeurs de $I_n$ et $J_n$.

**Exercice 8**. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{\overbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\dots\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}^{n-1 \text{ fois}}}{2}.$$

## Propriétés

**Exercice 9**. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\sin(x) \leqslant x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}$.

## Equations et inéquations

**Exercice 10**. Résoudre les équations et les inéquations suivantes d'inconnu $x \in \mathbb{R}$.

1. $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$
2. $\cos(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
3. $\sin(x) = \frac{1}{2}$
4. $\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$
5. $\sin(2x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
6. $\cos(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$
7. $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$
8. $\cos(2x) + \cos(x) = 0$
9. $\cos(x) > \frac{\sqrt{2}}{2}$
10. $\cos(x) \leqslant \sin(x)$
11. $\sin^2(x) \geqslant \frac{1}{2}$

**Exercice 11**. Résoudre les équations et les inéquations suivantes d'inconnu $x \in \mathbb{R}$.

1. $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = 1$
2. $2\sin(x)\cos(x) + \sqrt{3}\cos(2x) = 0$
3. $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$
4. $\sin(x) + \sin(3x) = 0$
5. $\cos(x) + \sin(x) = 1$
6. $\cos(x) + \sin(x) = 0$
7. $\sin(5x) + \sin(x) + 2\sin^2(x) = 1$
8. $1 - \cos^2(2x) = \sin(2x)\cos(x)$
9. $\cos(2x) + \sqrt{3}\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}$
10. $\cos(2x) + \cos(6x) = 1 + \cos(8x)$

**Exercice 12**. Résoudre les équations et les inéquations suivantes d'inconnu $x \in \mathbb{R}$.

1. $2\cos^2(x) + 5\cos(x) - 3 = 0$
2. $\cos^2(x) - \cos(x) - 12 = 0$
3. $4\cos^2(x) - 2\sqrt{3}\cos(x) + 2\cos(x) - \sqrt{3} \leqslant 0$
4. $4\cos^2(x) - 2\sqrt{3}\cos(x) - 2\sqrt{3}\cos(x) - \sqrt{6} > 0$
5. $2\cos^2(2x) - 3\cos(2x) + 1 < 0$

**Exercice 13**. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

1. Redémontrer les formules de l'angle moitié.
2. Résoudre l'équation $\sin(2\theta) = \frac{3}{2}\tan(\theta)$