# Feuille d'exos 21
# Séries numériques

## Calculs de sommes

**Exercice 1**. Etudier la nature des séries suivantes et en cas de convergence, calculer leurs sommes :

1. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \ln\left(\frac{n^2+1}{n^2-2n+2}\right)$
2. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{(n-1)n}$
4. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2n-1}{n(n+1)(n+2)}$
5. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}\right)$
6. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{4^n}$
7. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^3+3n}{2^n}$
8. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{4n-1}{3^n}$
9. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n + 4\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\right]$
10. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} n^2\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n + 4\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\right]$
11. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2-3n+1}{2^n}$
12. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{3^n}{n}$
13. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{5}{(2n+1)(2n+3)}$
14. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{\frac{1}{n}} - 2^{\frac{1}{(n+1)}}$
15. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$
16. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\mathrm{ch}(n)}{n}$
17. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{e}^{-nx}$, $x\in\mathbb{R}$
18. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$
19. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{3+n2^n}{4^{n+2}}$
20. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

**Exercice 2**. On admet que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$ et que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x$. Etudier la nature des séries suivantes et en cas de convergence, calculer leurs sommes :

1. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{n!}$
2. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2}{n!}$
3. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^3}{n!}$;
4. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2n^2-n+1}{n!}$
5. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^3-n+2}{n!}$
6. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(n^2-n+1)3^n}{n!}$
7. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2-3n+1}{n!}$
8. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2n+1}{3^n n!}$
9. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{4(-1)^n}{n!}$

**Exercice 3**. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0=1$ et $u_1=-\frac{7}{6}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = -\frac{1}{6}u_{n+1} + \frac{1}{6}u_n.$$

Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge et calculer sa somme.

## Séries alternées

**Exercice 4**. [Critère spécial des séries alternées] Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, décroissante et de limite nulle. On note, pour tout entier naturel $n$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k.$$

1. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^k a_k$ est convergente. On note $S$ la somme de cette série.
3. Montrer que pour tout entier naturel $n$,
$$\left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k - S\right| \leqslant a_{n+1}.$$
*Indication : pour tout $(p,q)\in\mathbb{N}^2$, $S_{2p+1}\leqslant S\leqslant S_{2q}$.*
4. Application : étudier la convergence des séries $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^n}{n}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^n}{\ln(n)}$. Sont-elles absolument convergentes ?

**Exercice 5**. On considère la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$.

1. Montrer que cette série n'est pas absolument convergente.
2. En remarquant que $\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$, calculer la somme de cette série.
3. En déduire un encadrement à $10^{-1}$ près de $\ln(2)$ par deux rationnels.

## Séries à termes positifs

**Exercice 6**. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-\sqrt{n}}$ est-elle convergente ?
*Indication : Montrer que la série est négligeable devant une série convergente.*

**Exercice 7**. Soit $a$ un réel positif ou nul. Discuter selon les valeurs de $a$, de la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{a^n}{n}$.

**Exercice 8**. Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries convergentes à termes strictement positifs. Montrer que les séries suivantes sont convergentes :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \max(u_n, v_n), \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} \sqrt{u_n v_n} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$$

**Exercice 9**. Etudier la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (n^2+1)\,\mathrm{e}^{-n}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^2-n}$
3. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(\frac{n^2+n^4}{2n^4}\right)$
4. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n!}{n^2}$
5. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2^n}{n+3^n}$
6. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a^n}{1+a^n},\ a\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$
7. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(1+\frac{\ln n}{n}\right)$
8. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\cos(n^2)}{n!}$
9. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\ln(1+n)}{\ln(1+3n)}$
10. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\ln(n)}{3^n}$
11. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\ln(n)}{n^{3/2}}$
12. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2n}\right)$
13. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 5} \sqrt{\frac{n+2}{n^3-5n+1}}$
14. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

## Comparaison série-intégrale

**Exercice 10**. En exploitant une comparaison avec une intégrale, établir que

1. $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \sim \frac{2}{3} n\sqrt{n}$
2. $\ln(n!) \sim n\ln(n)$

**Exercice 11**. Discuter suivant la valeur de $\beta$ de la nature de la série

$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\,(\ln(n))^{\beta}}.$$

Ces séries sont connues sous le nom de séries de Bertrand.

**Exercice 12**. On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{\ln(n)}{n^2}$.

1. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ est convergente.
2. Donner un équivalent du reste d'ordre $N$ de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$.

## En voilà encore...

**Exercice 13**. Donner la nature des séries suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1+n^2}{n!}$
2. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \arcsin\left(\frac{2n}{4n^2+1}\right)$
3. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sqrt{n(n-1)}}{n^3+2\sqrt{n}-3\ln n}$
4. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n!}{n^n}$
5. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}$
6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(\frac{\mathrm{ch}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right)$
7. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} (-1)^n \frac{n+\cos n}{n^2+(-1)^n}$
8. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\sqrt{n+(-1)^n\sqrt{n}}}$
9. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)}$
10. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n\left(\sqrt{n^4+1}-n^2\right)$
11. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n}$
12. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$
13. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$
14. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^{\sqrt{n}}$

**Exercice 14**.

1. Prouver la convergence de la série de terme général $\arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$.
2. Comparer ce terme général avec $\arctan(n+1)-\arctan(n)$
3. En déduire la valeur de la somme de la série étudiée.