Feuille d'exos 28
Rotation, projecteur, symétrie

Transformations du plan et de l'espace

Exercice 1. Soit s la symétrie vectorielle orthogonale de $\mathbb{R}^2$ par rapport à la droite $\mathrm{Vect}\,(1,2)$.

1. Déterminer une base orthonormale $\mathscr{B}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ de $\mathbb{R}^2$ telle que
$$\mathrm{mat}_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}(s)=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$
2. Soient $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $P=\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})$. Que dire de P ?
3. En déduire la matrice de s dans la base canonique.
4. Quelle est l'image de $(5,7)$ par s ?

Exercice 2. On se place dans $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

1. Rappeler la base canonique associée puis vérifier que $(z_1,z_2)\mapsto \mathrm{Re}\,(z_1\overline{z_2})$ correspond au produit scalaire usuel.
2. Reconnaitre la transformation $f:z\mapsto \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}z$ et donner sa matrice dans la base canonique.
3. L'application $g:z\mapsto \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\overline{z}$ est-elle une similitude ? une isométrie ?
4. Montrer que g est la composée de deux transformations usuelles et en déduire sa matrice dans la base canonique.

Exercice 3. Soit $\mathbb{R}^3$ munit d'une base orthonormée $\mathscr{C}=\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Déterminer la matrice de la rotation r d'axe $\vec{i}+\vec{j}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$ dans une base adaptée puis dans la base $\mathscr{C}$.

Exercice 4. Déterminer la matrice de s la symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^3$ par rapport à la droite $\mathrm{Vect}\,(1,2,1)$. Quelle est l'image du plan d'équation $x-y+z=0$?

Exercice 5. Dans $\mathbb{R}^3$ on considère σ la symétrie orthogonale par rapport au plan $\mathcal{P}$ d'équation $x+2y+z=0$.

1. Déterminer la matrice de σ dans une base adaptée puis dans la base canonique.
2. Même question pour p la projection orthogonale sur $\mathcal{P}$.

Exercice 6. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définit pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, par
$$f(x,y,z)=\left(\frac{-8x+y-4z}{9},\frac{x-8y-4z}{9},\frac{-4x-4y+7z}{9}\right).$$

1. Donner la matrice de f dans la base canonique.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}\,(f-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
3. Reconnaitre f.

Exercice 7. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définit pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, par
$$f(x,y,z)=\left(\frac{x-8y+4z}{9},\frac{4x+4y+7z}{9},\frac{-8x+y+4z}{9}\right).$$

1. Déterminer les caractéristiques de f.
2. Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre $A(-1,0,-2)$ et de rayon 1. Déterminer $\mathcal{S}'$ l'image de S par f puis déterminer $\mathcal{S}\cap\mathcal{S}'$.

Exercice 8. Déterminer la nature de l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donnée par
$$A=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}6&3&-2\\-2&6&3\\3&-2&6\end{pmatrix}.$$

Espaces préhilbertien/Euclidien

Exercice 9. Quel est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$? A l'aide d'une inégalité du cours, en déduire que
$$\forall\,(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^{,}\quad (x_1+\cdots+x_n)^2\leqslant n\left(x_1^2+\cdots+x_n^2\right).$$

Exercice 10. Orthonormaliser pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^4$ la base
$$u_1=(0,1,1,1),\qquad u_2=(1,0,1,1),\qquad u_3=(1,1,0,1),\qquad u_4=(1,1,1,0).$$

Exercice 11. Soient E un espace euclidien et $(e_1,\dots,e_n)$ une famille de vecteurs unitaires de E tels que
$$\forall x\in E,\quad \|x\|^2=\sum_{j=1}^{n}\langle x,e_j\rangle^2.$$
Montrer que $(e_1,\dots,e_n)$ est une base orthonormée de E.

Exercice 12. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien E.

1. Montrer que $(E+G)^\perp=F^\perp\cap G^\perp$.

2. En déduire lorsque E est euclidien que l'on a aussi $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

Exercice 13. Dans $\mathbb{R}^4$ on définit

$$F = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \right\}.$$

Déterminer la matrice dans la base canonique de p la projection orthogonale sur F.

Exercice 14. Soient E un espace euclidien, $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E, f et g deux endomorphismes de E tels que

- f et g commutent $f \circ g = g \circ f$
- la matrice de f dans $\mathscr{B}$ est symétrique
- la matrice de g dans $\mathscr{B}$ est anti-symétrique.

1. Montrer que pour tout $x \in E$, $\langle f(x), g(x) \rangle = 0$.
2. En déduire que pour tout $x \in E$, $\|f(x) - g(x)\| = \|f(x) + g(x)\|$.

Exercice 15. Soit $E = \mathscr{C}^{\infty}([0; 2\pi], \mathbb{R})$ munit du produit scalaire

$$\forall (f, g) \in E^2, \quad \langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) g(t) \, \mathrm{d}t.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la famille

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \ldots, \cos(nx), \sin(nx) \right)$$

forme une famille orthonormée de E.

Exercice 16. Soit $E = \mathscr{C}^1([0; 1], \mathbb{R})$ et φ l'opérateur sur $E \times E$ défini par

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (f, g) & \mapsto & \int_0^1 f(t) g(t) + f'(t) g'(t) \, \mathrm{d}t. \end{array}$$

1. Démontrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. Soient $F = \{ f \in E \mid f(0) = f(1) = 0 \}$ et $G = \{ g \in E \mid g'' = g \}$.
   (a) Montrer que $F + G = E$.
   (b) Montrer que F et G sont orthogonaux.
   (c) En déduire que F et G sont supplémentaires.
   (d) Préciser la projection orthogonale sur F.

Exercice 17. Soit f une isométrie d'un espace préhilbertien réel $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E.

1. Montrer que $f\left(F^{\perp}\right) \subseteq f(F)^{\perp}$.
2. Montrer que la réciproque est vraie si E est un espace euclidien.