Feuille d'exercices 3
Nombres complexes

L'ensemble des nombres complexes

Exercice 1. Calculer

1. $z_1 = (6+3i)(4-2i)$
2. $z_2 = \frac{7+3i}{3-7i}$
3. $z_3 = (1+i)^3$

Exercice 2. Donner la forme algébrique de $(1+i)^{125}$ puis de $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{125}$.

Exercice 3. Donner une caractérisation simple sur $z \in \mathbb{C}$ pour que le complexe $Z = 1 + iz$ soit réel.

Exercice 4. Déterminer l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $Z = z^2 + z + 1$ soit réel.

Forme trigonométrique

Exercice 5. Déterminer la forme trigonométrique des complexes suivants.

1. $z_1 = 3 + 3i$
2. $z_2 = -1 - \sqrt{3}i$
3. $z_3 = -\frac{4}{3}i$
4. $z_4 = -2$
5. $z_5 = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$
6. $z_6 = \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$
7. $z_7 = \mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{2i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 6. Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |a| < 1$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z \neq \frac{1}{\bar{a}}$, on définit $f(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$. Montrer que $\mathbb{U}$ est stable par f, c'est-à-dire que $f(\mathbb{U}) \subseteq \mathbb{U}$.

Exercice 7.

1. Déterminer l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe vérifie $\frac{z-i}{z-1} \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe vérifie $\frac{z-1}{z+1} \in i\mathbb{R}$.

Exercice 8. Soit $z \in \mathbb{U}$. Calculer $|1+z|^2 + |1-z|^2$.

Exercice 9. Déterminer la forme polaire de $1+i$, $1-i$ et $\sqrt{3}+i$. En déduire une expression simplifier des complexes suivants :

1. $z_1 = \frac{(1-i)^5}{(i+1)^4}$
2. $z_2 = (1+i)^{30}$
3. $z_3 = \left((1-i)^2\left(\sqrt{3}+i\right)\right)^{24}$

Exercice 10. On pose $z_1 = 1+i$, $z_2 = \sqrt{3}+i$ et $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$.

1. Déterminer la forme algébrique de z_3 puis sa forme polaire.
2. En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 11. Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ en utilisant des formules trigonométriques. En déduire une expression simple de

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^8.$$

Exercice 12. En utilisant la formule de Moivre, calculer $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$. En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 13. Soit $\theta \not\equiv \pi\ [2\pi]$. Simplifier $\frac{1+\mathrm{e}^{i\theta}}{1+\mathrm{e}^{-i\theta}}$.

Exercice 14. Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser les expressions suivantes.

1. $\cos^4(x)$
2. $\sin^5(x)$
3. $\sin^2(x)\cos^3(x)$
4. $\cos(x)\cos^2(2x)$

Exercice 15. Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ et de leurs puissances les nombres suivants :

1. $\cos(6x)$
2. $\sin(5x)$
3. $\sin(3x)$

Exercice 16. Déterminer l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C}^*$ tels que les modules de z, $\frac{1}{z}$ et $z-1$ soient égaux.

Exercice 17. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On pose

$$C = \sum_{k=0}^{n} \cos(a+kb) = \cos(a) + \cos(a+b) + \cdots + \cos(a+nb)$$

$$S = \sum_{k=0}^{n} \sin(a+kb) = \sin(a) + \sin(a+b) + \cdots + \sin(a+nb)$$

1. Calculer C et S lorsque $b \in 2\pi\mathbb{Z}$.
2. On suppose maintenant que $b \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Montrer que

$$C + iS = \mathrm{e}^{i\left(\frac{nb}{2}+a\right)} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}b\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)}.$$

et en déduire C et S.

Equations algébriques complexes

Exercice 18. Déterminer les racines carrées dans $\mathbb{C}$ des complexes suivants.

1. $z_1 = 7 + 4i$
2. $z_2 = 7 - 24i$
3. $z_3 = -15+8i$
4. $z_4 = 9 + 40i$

Exercice 19. Résoudre les équations suivantes d'inconnu $z \in \mathbb{C}$.

1. $z^2 - (3+4i)\,z - 1 + 5i = 0.$
2. $(2+i)\,z^2 - (5-i)\,z + 2 - 2i = 0.$
3. $z^4 - (5-14i)\,z^2 - 2\,(12+5i) = 0.$
4. $z^4 - (3+8i)\,z^2 - 16 + 12i = 0.$
5. $z^4 + (3-6i)\,z^2 - 2\,(4+3i) = 0.$
6. $z^4 + (2i-1)\,z^2 - 1 - i = 0.$

Exercice 20. Déterminer toutes les solutions réelles et imaginaires pures de l'équation d'inconnu $z \in \mathbb{C}$,

$$z^4 - 4\,(1+i)\,z^3 + 12iz^2 + 8\,(1-i)\,z - 5 = 0.$$

En déduire toutes les solutions complexes.

Exercice 21. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{U}^3$. Montrer que $|x+y+z| = |xy+xz+yz|$.
Rappel : pour tout $\omega \in \mathbb{U}$, $\omega^{-1} = \overline{\omega}$.

Exercice 22. Résoudre l'équation suivante d'inconnu $z \in \mathbb{C}$, $z^4 = \frac{16\sqrt{2}}{1-i}$.

Exercice 23. Déterminer les racines quatrièmes dans $\mathbb{C}$ du complexe $Z = -119+120i$

Exercice 24. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation suivante d'inconnu $z \in \mathbb{C}$, $z^n = \overline{z}$.

Exercice 25. On pose $\omega = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{7}}$ et on définit

$$S = \omega + \omega^2 + \omega^4 \qquad \text{et} \qquad T = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6.$$

Calculer $S+T$ et ST et en déduire S et T.

Exercice 26. Pour chacun des systèmes suivants, déterminer les complexes $(u,v) \in \mathbb{C}^2$ solutions.

1. $\begin{cases} u+v=2 \\ uv=2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} u+v=3 \\ \frac{1}{u}+\frac{1}{v} = \frac{9+3i}{10} \end{cases}$
3. $\begin{cases} u+v=1 \\ u^2+v^2 = -1+2i \end{cases}$
4. $\begin{cases} u^2v+uv^2=6 \\ u^3+v^3=9 \end{cases}$

Exercice 27. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

1. Factoriser dans $\mathbb{C}$ le polynôme $P(z) = z^{n-1} + \cdots + z + 1$
2. Démontrer que $\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = n$.
3. En déduire que $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

Applications géométriques

Exercice 28. Soient $A\,(2+4i)$ et $B\,(8+i)$ deux points du plan complexe $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$. Montrer que le triangle OAB est rectangle.

Exercice 29. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. Calculer la longueur d'un côté d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité.

Exercice 30. Soit M un point du plan complexe d'affixe $z = a+ib \in \mathbb{C}$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, I le point d'affixe i et N l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. Démontrer que les points M, I et N sont alignés si et seulement si $\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ et en déduire l'ensemble des points M solutions.
2. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que le triangle MIN soit équilatéral.

Exercice 31. Soient $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ trois points du plan complexes.

1. Démontrer que si $c = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\,(b-a)+a$ alors,
$$a^2+b^2+c^2 = ab+ac+bc.$$
2. On fixe $a \in \mathbb{C}$ l'affixe de A et $b \in \mathbb{C}$ l'affixe de C. Déterminer l'ensemble des points $C(c)$, $c \in \mathbb{C}$ vérifiant $a^2+b^2+c^2 = ab+ac+bc$. Que peut-on alors dire du triangle ABC ?

Exercice 32. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan complexe dont l'affixe $z \in \mathbb{C}$ vérifie l'égalité donnée.

1. $\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = 1$
2. $\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Aide aux calculs : à l'aide du triangle de Pascal et la formule du binôme de Newton (cf prochain chapitre) on a pour tout $(a,b) \in \mathbb{C}^2$,

$$\begin{aligned}
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\
(a+b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \\
(a+b)^6 &= a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.
\end{aligned}$$