Solution de la question 8 de l'exercice 13 du TD4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On souhaite calculer $S_n = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |i-j|$. Pour pouvoir calculer $|i-j|$, il nous faut connaître le signe de $i-j$ pour s'affranchir de la valeur absolue. Puisque $|i-j| = i-j \quad \Leftrightarrow i \geqslant j$, il nous faut discuter de la position relative de i par rapport à j.
Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et commençons par appliquer la Proposition III.1 :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |i-j|\,.$$

On souhaite alors découper la somme intérieure selon si $j \leqslant i$ ou si $j \geqslant i+1$. Notons cependant que $j \geqslant i+1$ n'est possible que si $i \neq n$. Donc on écrit tout d'abord que

$$S_n = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n} |i-j| + \sum_{j=1}^{n} |n-j| = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n} |i-j| + \sum_{j=1}^{n}(n-j).$$

On peut alors découper la somme intérieure suivant la position de j par rapport à i :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{i} |i-j| + \sum_{j=i+1}^{n} |i-j|\right) + n\sum_{j=1}^{n} 1 - \sum_{j=1}^{n} j \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{i} (i-j) + \sum_{j=i+1}^{n} (j-i)\right) + n^2 - \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

On effectue le changement d'indice $\tilde{j} = j-i$ dans la deuxième somme intérieure. On obtient :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n-1}\left(i\sum_{j=1}^{i} 1 - \sum_{j=1}^{i} j + \sum_{\tilde{j}=1}^{n-i} \tilde{j}\right) + \frac{n\,(2n-n-1)}{2} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}\left(i^2 - \frac{i(i+1)}{2} + \frac{(n-i)(n-i+1)}{2}\right) + \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} i^2 - \frac{i(i+1)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(n-i)(n-i+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}. \end{aligned}$$

On effectue le changement d'indice $\tilde{i} = n-i$ dans la seconde somme :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i^2-i}{2} + \sum_{\tilde{i}=1}^{n-1} \frac{\tilde{i}(\tilde{i}+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{i^2-i}{2} + \frac{i^2+i}{2}\right) + \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} i^2 + \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \frac{(n-1)n(2n-1+3)}{6} = \frac{(n-1)n(2n+2)}{6} = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}. \end{aligned}$$

Ai-je bon ? Vérifions pour des valeurs faciles de n.
Si $n = 1$, $S_1 = \sum_{i=1}^{1}\sum_{j=1}^{1} |i-j| = |1-1| = 0$ et $\frac{(1-1)1(1+1)}{3} = 0$. Notre formule est juste pour $n = 0$.
Si $n = 1$, $S_2 = \sum_{i=1}^{2} (|i-1| + |i-2|) = |1-1| + |1-2| + |2-1| + |2-2| = 0+1+1+0 = 2$. D'autre part, $\frac{(2-1)2(2+1)}{3} = 2$. Notre formule est aussi bonne pour $n = 2$.
Vous pouvez vérifier que si $n = 3$, $S_3 = 8$.