Feuille d'exercices 5
Calculs réels

Exercice 1. Simplifier les expressions suivantes :

1. $A = \frac{2}{3} - \frac{5}{12} + \frac{1}{9} - \frac{5}{6}$.
2. $B = \dfrac{\frac{\frac{2}{3}+2}{\frac{3}{4}-\frac{5}{6}} - \frac{1}{5}}{\frac{1}{\frac{2}{3}-\frac{3}{2}}}$.
3. $C = \left(\sqrt{2} + 5\sqrt{3}\right)\left(2 - \sqrt{3}\right)$.
4. $D = \frac{3\sqrt{72}}{2\sqrt{162}}$.
5. $E = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$.
6. $F = \frac{\binom{11}{5}}{\binom{12}{4}}$.
7. $G = \frac{2^5 \times 25 \times 3^{-4} \times 36}{3^8 \times 15 \times 100}$.
8. $H = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$.

Exercice 2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer les expressions suivantes.

1. $A = \left(x^2 - 2\right)^2$.
2. $B = (3x+1)^4$.
3. $C = (3x+2)^7$.
4. $D = \left(2x^2 - x + 1\right)^2$.
5. $E = \left(x^2 + 2x + 2\right)^3$.
6. $F = (x + y + z + t)^2$.

Exercice 3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser les expressions suivantes.

1. $A = 2x^2 - 12x + 18$.
2. $B = 4x^2 - 16$.
3. $C = (2x-6)(x+2) - (x+1)(x-3) + 2x(3-x)$.
4. $D = (2x+1)^3 + (2x+1)^2 + 2x + 1$.
5. $E = (x+1)^2 - 4x$.
6. $F = x^3 + 6x^2 + 14x + 12$.
7. $G = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$.
8. $H = x^4 - 2x^2 - 3$.
9. $I = x^3 - 1$.
10. $J = x^3 + 1$.
11. $K = x^4 + 1$.

Exercice 4. Soit $a \in \mathbb{R}$ dont on précisera à chaque fois les valeurs possibles pour que les expressions soient bien définies. Simplifier les expressions suivantes.

1. $A = \sqrt{2+\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{2}$.
2. $B = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{12}+\sqrt{18}}$.
3. $C = \sqrt{a+1-2\sqrt{a}} + \sqrt{a+1+2\sqrt{a}}$.
4. $D = \sqrt{(a+1)^2 - 4a} + \sqrt{(a-1)^2 + 4a}$.
5. $E = \sqrt{a+2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$.
6. $F = \sqrt{9-4\sqrt{5}} + \sqrt{9+4\sqrt{5}}$.
7. $G = \sqrt{1+2016\sqrt{1+2017\times 2019}}$ *Indication : poser $X = 2018$.*
8. $H = \left(\sqrt{3}+1\right)\sqrt[3]{9-5\sqrt{}} - \left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt[3]{9+5\sqrt{3}}$.

Exercice 5. Soit $a \in \mathbb{R}$. Simplifier les calculs suivants.

1. $A = \sqrt[3]{5^{12}}$.
2. $B = \sqrt[4]{27}\sqrt[3]{3}$.
3. $C = \sqrt[5]{a^3\sqrt[3]{a}}$.
4. $D = \sqrt[4]{8}\sqrt[4]{2}$.
5. $E = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$.
6. $F = \sqrt{12}\sqrt{3}$.
7. $G = \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4}$.
8. $H = \sqrt[8]{81}\sqrt[8]{27}\sqrt[8]{3}$.
9. $I = \sqrt[14]{4^7}$.
10. $J = \sqrt{\sqrt{16}}$.
11. $K = \sqrt[7]{\sqrt{7^7}}$.
12. $L = \sqrt[3]{\sqrt{3^6}}$.

Exercice 6. Pour chacune des fractions suivantes, décrire l'ensemble des valeurs possibles dans $\mathbb{R}$ des paramètres puis rendre le dénominateur rationnel.

1. $A = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$.
2. $B = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{a+B}}$.
3. $C = \frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$.
4. $D = \frac{1}{\sqrt[3]{2}+2}$.
5. $E = \frac{1}{\sqrt[4]{2}-1}$.
6. $F = \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}}$.

Exercice 7. Soit

$$x = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}.$$

Montrer que x est solution d'une équation de la forme $x^3 = \alpha x + \beta$, avec α et β deux réels à déterminer. En déduire une forme simplifiée de x.

Exercice 8. Pour chaque équation, déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ solutions.

1. $x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$.
2. $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$.
3. $(x-1)(x+2)(x+3) = (x+4)(x-2)(x+1)$.
4. $x^4 - 2x^2 - 3x - 2 = 0$.
5. $6x^4 - x^2 - 1 = 0$.
6. $6x^4 - 13x^3 + 12x^2 - 13x + 6 = 0$.
7. $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = 0$.
8. $x^6 + \sqrt{2}x^3 - \sqrt{3}x^3 - \sqrt{6} = 0$.
9. $\mathrm{e}^{2x} - 5\,\mathrm{e}^{x} + 6 = 0$.
10. $\mathrm{e}^{2x} + 5\,\mathrm{e}^{x} + 6 = 0$.
11. $\mathrm{e}^{3x} - 2\,\mathrm{e}^{2x} - 5\,\mathrm{e}^{x} + 6 = 0$.
12. $\ln^2(x) - 3\ln(x) + 2 = 0$.
13. $\ln^2(x) - 2\ln(x) + 3 = 0$.
14. $4\ln^2(x) + 8\ln(x) + 3 = 0$.

Exercice 9. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes d'équations suivants.

1. $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x - y = -3 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + y + 3z = -2 \\ -x + y + z \end{cases}$
3. $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - y + 2z = 2 \\ x + 4y + z = 10 \end{cases}$

4. $\begin{cases} -x+4y-5z=7 \\ 3x-5y+3z=-1 \\ x+3y-7z=2 \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ x-y+2z=2 \\ 3x-y+z \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+3z=2 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$

Exercice 10. Pour chaque inéquation, déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ solutions.

1. $x^2-5x+6 \geqslant 0$
2. $x^4+x^2-1>0$
3. $-2x^2+2x-3 \geqslant 0$
4. $x^3+3x^2-4<0$
5. $x^4-2x^3+3x^2-2x+2>0$
6. $6x^4-17x^3-13x^2+33x-9 \leqslant 9$
7. $\frac{x+5}{x^2-1} \geqslant 1$
8. $x \geqslant \frac{1}{x}$
9. $\mathrm{e}^{2x} - 2\,\mathrm{e}^{x} - 8 > 0$
10. $\mathrm{e}^{2x} + 6\,\mathrm{e}^{x} + 8 \leqslant 0$
11. $\mathrm{e}^{2x} - 5\,\mathrm{e}^{x} + 4 \geqslant 0$
12. $\ln^2(x) - 7\ln(x) + 12 \geqslant 0$

Exercice 11. Pour chaque équation ou inéquation, déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ solutions.

1. $|x+3|=5$
2. $|x+3| \leqslant 5$
3. $|2x-5| = \left|x^2-4\right|$
4. $|4-x|=x$
5. $\left|x^2+x-3\right| = |x|$
6. $|x+2|+|3x-1|=4$
7. $x\,|x| = 3x+2$
8. $x+|x| = \frac{2}{x}$
9. $\left|x^2-6x+4\right| \leqslant 1$
10. $x+2<|2x-5|$
11. $|2x-4| \leqslant |x+2|$
12. $|x+12| \leqslant \left|x^2-8\right|$
13. $|2x-4| \geqslant \left|x^2-4\right|$
14. $\frac{x}{x+1} \leqslant |2x+1|+1$
15. $x+\frac{1}{x} \leqslant |x+4|+3$
16. $x^2-4\,|x|+3>0$
17. $|x+3| > \left|x^2-3\right|$
18. $|x+2| \geqslant \frac{1-x}{1+x}$

Exercice 12. Pour chaque équation ou inéquation, déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ solutions.

1. $x+5=\sqrt{x+11}$
2. $x=1+\sqrt{x^2-2}$
3. $x+1 \leqslant \sqrt{x+2}$
4. $x+3 \leqslant \sqrt{x+5}$
5. $\sqrt{x^2-1} \leqslant 2-x$
6. $3x^2-3x-4\sqrt{x^2-x+3}=6$
7. $x+\sqrt{x^2-5x+4}<2$
8. $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+2}=2$
9. $\left(\frac{2x}{1-\sqrt{1+2x}}\right)^2 < 2x+9$
10. $\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$
11. $2x+1<\sqrt{x^2+8}$
12. $\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} \leqslant \sqrt{\frac{x+2}{x+1}}$
13. $\sqrt{6-x}+\sqrt{3-x}=\sqrt{x+5}+\sqrt{4-3x}$

Exercice 13. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\sqrt[4]{41+x}+\sqrt[4]{41-x}=4$. On pose $X=\sqrt[4]{41+x}$ et $Y=\sqrt[4]{41-x}$.

1. A l'aide des valeurs de $X+Y$ et X^4+Y^4, déterminer les valeurs possibles de XY.
2. En déduire l'ensemble des valeurs possibles de x.

Exercice 14. Pour chacune des équations ou inéquations, déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ solutions.

1. $\sqrt{|x-3|}=|x-1|$
2. $\sqrt{|x-3|} \leqslant x-1$
3. $\sqrt{|x^2-4|} \leqslant |x-1|$
4. $\sqrt{|x+2|} \leqslant |x-10|$
5. $\sqrt{1-2x}=|x+7|$

Exercice 15. Soit $m \in \mathbb{R}$. On souhaite déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sqrt{x^2-m}+2\sqrt{x^2-1}=x.$$

On pose $u=\sqrt{x^2-m}$ et $u=\sqrt{x^2-1}$.

1. Montrer que $v^2-u^2=m-1$ et que $4v^2+4uv=m$.
2. En déduire, suivant les valeurs de m, l'ensemble des réels x solutions.

Exercice 16. Démontrer les inégalités suivantes.

1. $\forall a,b \in \mathbb{R}, \quad a \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$ et $|a| \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$.
2. $\forall a,b \in [0;1], \quad a^2+b^2-ab \leqslant 1$.
3. $\forall a,b \in \mathbb{R}_+, \quad 1+\sqrt{ab} \leqslant \sqrt{1+a}\sqrt{1+b}$.
4. $\forall a,b \in \mathbb{R}, \quad ab \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$.
5. $\forall a,b,c \in \mathbb{R}, \quad ab+bc+ca \leqslant a^2+b^2+c^2$.
6. $\forall a,b \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{1}{2}\left(\ln(a)+\ln(b)\right) \leqslant \ln\left(\frac{a+b}{2}\right)$.
7. $\forall a,b \in \mathbb{R}, \quad (a+b)^4 \leqslant 8\left(a^4+b^4\right)$.

Exercice 17. Démontrer les inégalités suivantes.

1. $\forall x,y \in \mathbb{R}, \quad |x|+|y| \leqslant |x+y|+|x-y|$.
2. $\forall x,y \in \mathbb{R}, \quad 1+|xy-1| \leqslant (1+|x-1|)(1+|y-1|)$.

Exercice 18. Démontrer les inégalités suivantes.

1. $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \sin(x) \leqslant x$ et en déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x)| \leqslant |x|$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) \leqslant x-1$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x+1 \leqslant \mathrm{e}^x$.
4. $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \quad |x| \leqslant |\tan(x)|$.
5. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\right| \leqslant |x|$.

Exercice 19. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $x-\frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$ et que pour tout $x \in \left[\frac{1}{2};0\right]$, $x-x^2 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x-\frac{x^2}{2}$. En déduire $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

Exercice 20. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x-\sin(x)| \leqslant \frac{|x|^3}{6}$.