



Feuille d'exercices 7

Fonction usuelles

Les fonctions logarithme et exponentielle

Exercice 1. Dans chaque cas, déterminer l'ensemble des réels vérifiant le système d'équations.

$$1. \begin{cases} x + y = 25 \\ \ln(x) + \ln(y) = \ln(100) \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x^2 + y^2 = 169 \\ \ln(x) + \ln(y) = \ln(60) \end{cases}$$

Exercice 2.

- Montrer que pour tout $x \in]-1; +\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$.
- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(1 + \frac{1}{n})^n \leq e \leq \frac{1}{(1 - \frac{1}{n})^n}$.

Les fonctions logarithmes et exponentielles en base a

Exercice 3. Déterminer l'ensemble des réels $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\})^2$ tels que

$$1. \begin{cases} 4(\log_x(y) + \log_y(x)) = 17 \\ xy = 243 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} 7(\log_x(y) + \log_y(x)) = 50 \\ xy = 256 \end{cases}$$

Exercice 4. Résoudre les équations suivantes.

$$1. 5^{3x} = 7 \quad 2. 2^{x^3} = 3^{x^2} \quad 3. 2^{2x-1} + 3^x + 4^{x+\frac{1}{2}} - \frac{9^{\frac{x}{2}+1}}{2} = 0$$

$$4. e^x + e^{1-x} = e + 1 \quad 5. 2^x + 3 \times 2^{1-x} = 5 \quad 6. x\sqrt{x} = (\sqrt{x})^x$$

Les fonctions puissances

Exercice 5. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $u(x) = e^{x^2}$ et $v(x) = \frac{1}{x} \ln(x^{\frac{1}{x}})$. Simplifier $u(x)^{v(x)}$.

Exercice 6. Déterminer les limites suivantes.

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^x \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} x^{x^x} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \quad 4. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{x}} \quad 6. \lim_{x \rightarrow 0} x\sqrt{x} \quad 7. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}} \quad 8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$$

Exercice 7. Déterminer les limites suivantes.

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x \ln(x) + e^x} \quad 2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} + 2}{e^x - 3} \quad 3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 2}{x^{10} + 5}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 2x \cos(x) \quad 5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sin(x)}{1 - x^2} \quad 6. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{2x - \ln^2(x)}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{x+1}{x}\right) \quad 8. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} + x \quad 9. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}$$

Les fonctions hyperboliques

Exercice 8. Simplifier $A(x) = \frac{\text{ch}(\ln(x)) + \text{sh}(\ln(x))}{x}$.

Exercice 9. Dans chacun des cas, déterminer l'ensemble des réels x solutions de l'équation.

$$1. \text{ch}(x) = 2 \quad 2. 5 \text{ch}(x) - 4 \text{sh}(x) = 3$$

Exercice 10. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $C_n = \sum_{k=0}^n \text{ch}(a + kb)$ et $S_n = \sum_{k=0}^n \text{sh}(a + kb)$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $C_n + S_n$ et $C_n - S_n$.
- En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ les valeurs de C_n et de S_n .

Les fonctions circulaires réciproques

Exercice 11. Donner le domaine de définition des expressions suivantes puis les simplifier.

$$1. \cos(2 \arccos(x)) \quad 2. \cos(2 \arcsin(x)) \quad 3. \sin(\arccos(x))$$

$$4. \sin(2 \arctan(x)) \quad 5. \tan(2 \arcsin(x))$$

Exercice 12. Soit $p \in \mathbb{N}$.

- Justifier que $\arctan(p+1) - \arctan(p) \in]0; \frac{\pi}{2}[$.
- Exprimer $\arctan(p+1) - \arctan(p)$ sous la forme $\arctan(u)$, avec $u \in \mathbb{R}$ à déterminer.
- En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $S_n = \sum_{p=0}^n \arctan\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right)$.

Exercice 13. Dans chacun des cas, déterminer l'ensemble des réels x solutions.

$$1. \arcsin(x) = \arcsin\left(\frac{4}{5}\right) + \arcsin\left(\frac{5}{13}\right) \quad 2. \arcsin(\tan(x)) = x$$

$$3. \arccos(x) = \arcsin(2x) \quad 4. \arctan(x) + \arctan(x\sqrt{3}) = \frac{7\pi}{12}$$

$$5. \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \arctan(x) \quad 6. \arcsin\left(\frac{\tan(x)}{2}\right) = \arctan(x)$$