Colle du 09/09 - Sujet 1
Révisions d'algèbre linéaire

Exercice 1. On pose $u = (1, 2, 3)$, $v = (4, 5, 6)$ et $w = (5, 7, 9)$.
1. Déterminer une base de $F = \text{Vect}(u, v, w)$.
2. Déterminer une équation cartésienne de F dans la base canonique.

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application φ définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$\forall X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(X) = X + \text{tr}(X)\,A.$$

1. Justifier que φ est un endomorphisme.
2. Montrer que si $\text{tr}(A) \neq -1$ alors φ est bijectif.
3. On suppose que $\text{tr}(A) = -1$.
   (a) Déterminer le noyau de φ.
   (b) Quel est le rang de φ ?

Colle du 09/09 - Sujet 2
Révisions d'algèbre linéaire

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.
1. Calculer $A^2 - 6A + 8I_3$.
2. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.
3. Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant $u^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $u^{n-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$.
1. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\big(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x)\big)$ soit une base de E.
2. Ecrire la matrice de u dans cette base.

Colle du 09/09 - Sujet 3
Révisions d'algèbre linéaire

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.
1. Calculer $A^2 - \text{tr}(A)\,A + \det(A)\,I_2$.
2. Retrouver alors lorsque A est inversible l'expression de A^{-1}.

Exercice 2. Soient $T \in \mathbb{R}_+^*$ et E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ et T-périodique. Soit φ l'application définie sur E par $\forall f \in E$, $\varphi(f) = f'$.
1. Justifier que φ est un endomorphisme de E.
2. φ est-il injectif ?
3. Montrer que $\text{Im}(\varphi) = \left\{ g \in E \;\middle|\; \int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$. φ est-il surjectif ?
4. Montrer que $\text{Ker}(\varphi)$ et $\text{Im}(\varphi)$ sont supplémentaires dans E.