Interrogation 1 d'entrainement
Logique et raisonnement

1. **Manipuler les implications et équivalences.** Compléter avec les symboles $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$ ou $\times$ (lorsqu'aucun des précédents symboles ne fonctionne) les phrases suivantes. Soient $(x,a) \in \mathbb{R}^2$, $(y,b) \in (\mathbb{R}^*)^2$, $z \in \mathbb{C}$, $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (i.e. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle)

1.1	$\cos(x) = 0$	....	$\exists k \in \mathbb{Z},\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$
1.2	$\mathrm{e}^x \geqslant 1$	....	$x \geqslant 0.$
1.3	$z \in \mathbb{R}$	....	$z = \overline{z}.$
1.4	$x = y$	....	$\cos(x) = \cos(y).$
1.5	$\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$	....	$\begin{cases} a = x \\ b = y \end{cases}.$
1.6	$\ln(x) \geqslant 0$	....	$x > 1.$
1.7	$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante	....	$u_{25} > u_{20}.$
1.8	$x \geqslant \frac{\pi}{2}$	....	$\cos(x) \leqslant 0.$
1.9	$x^2 \geqslant 25$	....	$x \geqslant 5.$
1.10	$\exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = A$	....	$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R},\ f(x) > B.$

2. **Réciproque/contraposée/négation.**

   2.1 Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Enoncer la réciproque, la contraposée et la négation de l'implication suivante :

   $$\frac{x-y}{2\pi} \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \cos(x) = \cos(y).$$

   2.2 Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Enoncer la réciproque, la contraposée et la négation de l'implication suivante :

   $$(f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}) \text{ ET } (f \text{ est majorée sur } \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) \text{ existe dans } \mathbb{R}.$$

   2.3 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$). Enoncer la réciproque, la contraposée et la négation de l'implication suivante :

   $$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée.}$$

   2.4 Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ admettant une limite en $+\infty$ et soit $a \in \mathbb{R}$. Enoncer la réciproque, la contraposée et la négation de l'implication suivante :

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > a \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) \geqslant a.$$

   2.5 Soient $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Enoncer la réciproque, la contraposée et la négation de l'implication suivante :

   $$\left[\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x < y \ \Rightarrow\ f(x) < f(y))\right] \quad \Rightarrow \quad \left[\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (f(x) = f(y) \ \Rightarrow\ x = y)\right].$$

3. **Quantificateurs.**
   3.1 Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$). Ecrire avec un ou des quantificateurs le fait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit monotone puis sa négation.
   3.2 Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Ecrire avec un ou des quantificateurs le fait que f soit surjective puis sa négation.
   3.3 Ecrire avec un ou des quantificateurs le fait que π soit irrationnel puis sa négation.
   3.4 Soit $\mathscr{E}$ un ensemble de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ecrire avec un ou des quantificateurs le fait que toutes les fonctions de $\mathscr{E}$ sont positives sur $\mathbb{R}$ puis sa négation.
   3.5 Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Ecrire avec un ou des quantificateurs le fait que f ne prenne que des valeurs entières puis sa négation.
4. **Récurrence.**
   4.1 Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.
   4.2 Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
   4.3 Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
   4.4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5u_n + 2$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{5^n-1}{2}$.
   4.5 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 6$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 8u_n$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4^n - (-2)^n$.
5. **Calcul dans $\mathbb{R}$.**
   5.1 Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $\sqrt{x^2-1} = x+2$.
   5.2 Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $\sqrt{x-1} = \sqrt{2x+1}$.
   5.3 Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $\sqrt{x+5} = \sqrt{2x+2}$.
   5.4 Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $\sqrt{2x^2-x-3} = x+1$.
   5.5 Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $x = -1 + \sqrt{x^2-2}$.

Question 1.

1.1 $\Leftarrow$

1.2 $\Leftrightarrow$

1.3 $\Leftrightarrow$

1.4 $\Rightarrow$

1.5 $\Leftarrow$

1.6 $\Leftarrow$

1.7 $\times$

1.8 $\times$

1.9 $\Leftarrow$

1.10 $\Rightarrow$

Question 2.

2.1 Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. La réciproque est

$$\cos(x) = \cos(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{x-y}{2\pi} \in \mathbb{Z}.$$

La contraposée est

$$\cos(x) \neq \cos(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{x-y}{2\pi} \notin \mathbb{Z}.$$

La négation est

$$\frac{x-y}{2\pi} \in \mathbb{Z} \ \text{ ET } \ \cos(x) \neq \cos(y).$$

2.2 Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. La réciproque est

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \text{ existe dans } \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad (f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}) \ \text{ ET } \ (f \text{ est majorée sur } \mathbb{R}).$$

La contraposée est

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \text{ n'existe pas dans } \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad (f \text{ n'est pas croissante sur } \mathbb{R}) \ \text{ OU } \ (f \text{ n'est pas majorée sur } \mathbb{R}).$$

La négation est

$$(f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}) \ \text{ ET } \ (f \text{ est majorée sur } \mathbb{R}) \ \text{ ET } \ \left(\lim_{x \to +\infty} f(x) \text{ n'existe pas dans } \mathbb{R}\right).$$

2.3 Soient $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. La réciproque est

$$(u_n) \text{ est bornée} \quad \Rightarrow \quad (u_n) \text{ converge.}$$

La contraposée est

$$(u_n) \text{ n'est pas bornée} \quad \Rightarrow \quad (u_n) \text{ diverge.}$$

La négation est

$$(u_n) \text{ converge et n'est pas bornée.}$$

2.4 Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ admettant une limite en $+\infty$ et soit $a \in \mathbb{R}$. La réciproque est

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \geqslant a \quad \Rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) > a.$$

La contraposée est

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) < a \quad \Rightarrow \quad \exists x \in \mathbb{R}, \ f(x) \leqslant a.$$

La négation est

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) > a \ \text{ ET } \ \lim_{x \to +\infty} f(x) < a.$$

2.5 Soient $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. La réciproque est

$$\left[\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (f(x) = f(y) \ \Rightarrow\ x = y)\right] \quad \Rightarrow \quad \left[\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x < y \ \Rightarrow\ f(x) < f(y))\right].$$

La contraposée est

$$\left[\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, x \neq y,\ \text{tel que } f(x) = f(y)\right] \quad \Rightarrow \quad \left[\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x < y \text{ tel que } f(x) \geqslant f(y)\right].$$

La négation est

$$\left[\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x < y \ \Rightarrow\ f(x) < f(y))\right] \text{ ET } \left[\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, x \neq y,\ \text{tel que } f(x) = f(y)\right].$$

Question 3.

3.1 Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. L'assertion est

$$(\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n) \quad \text{OU} \quad (\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n).$$

La négation est

$$(\exists n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n) \quad \text{ET} \quad (\exists m \in \mathbb{N},\ u_{m+1} > u_m).$$

3.2 Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. L'assertion est

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = y.$$

Sa négation est

$$\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq y.$$

3.3 L'assertion est

$$\forall (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*,\ \pi \neq \frac{p}{q}.$$

La négation est

$$\exists (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*,\ \pi = \frac{p}{q}.$$

3.4 Soit $\mathscr{E}$ un ensemble de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'assertion est

$$\forall f \in \mathscr{E},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0.$$

La négation est

$$\exists f \in \mathscr{E},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) < 0.$$

3.5 Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \in \mathbb{Z}.$$

La négation est

$$\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \notin \mathbb{Z}.$$

Question 4.

4.1 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n) : 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Initialisation. Si $n = 1$, alors $\frac{1(1+1)}{2} = 1$. Donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Supposons $P(n)$. Alors $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Donc

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Donc $P(n+1)$ est aussi vraie.

Conclusion.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.}$$

4.2 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$: $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Initialisation. Si $n=1$, alors $\frac{1(1+1)(2\times 1+1)}{6} = 1$. Donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Supposons $P(n)$. Alors $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Donc

$$\begin{aligned} 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+(n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{\left(2n^2+n+6n+6\right)(n+1)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}. \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est aussi vraie.

Conclusion.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.}$$

4.3 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$: $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Initialisation. Si $n=1$, alors $\frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1$. Donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Supposons $P(n)$. Alors $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Donc

$$\begin{aligned} 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3+(n+1)^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4} \\ &= \frac{\left(n^2+4n+4\right)(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{(n+2)^2(n+1)^2}{6}. \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est aussi vraie.

Conclusion.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.}$$

4.4 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: $u_n = \frac{5^n-1}{2}$.

Initialisation. Si $n=0$, alors $\frac{5^n-1}{2} = \frac{1-1}{2} = 0 = u_0$. Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Supposons $P(n)$. Alors $u_n = \frac{5^n-1}{2}$. Par définition de la suite,

$$u_{n+1} = 5u_n + 2 = 5\frac{5^n-1}{2} + 2 = \frac{5^{n+1}-5+4}{4} = \frac{5^{n+1}-1}{4}.$$

Donc $P(n+1)$ est aussi vraie.

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{5^n-1}{2}.}$$

4.5 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: $u_n = 4^n - (-2)^n$. Procédons à une récurrence double.

Initialisation. Si $n=0$, alors $4^n-(-2)^n = 1-1 = 0 = u_0$. Donc $P(0)$ est vraie.

Si $n=1$, alors $4^n-(-2)^n = 4-(-2) = 6 = u_1$. Donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $P(n)$ ET $P(n+1) \Rightarrow P(n+2)$. Supposons $P(n)$ et $P(n+1)$. Alors $u_n = 4^n - (-2)^n$ et $u_{n+1} = 4^{n+1} - (-2)^{n+1}$. Par définition de la suite,

$$\begin{aligned} u_{n+2} = 2u_{n+1} + 8u_n &= 2\left(4^{n+1} - (-2)^{n+1}\right) + 8\left(4^n - (-2)^n\right) \\ &= 2 \times 4^{n+1} - 2 \times (-2)^{n+1} + 2 \times 4 \times 4^n - (-4)(-2)(-2)^n \\ &= 2 \times 4^{n+1} - 2 \times (-2)^{n+1} + 2 \times 4^{n+1} - (-4)(-2)^{n+1} \\ &= 4^{n+1}(2+2) - (-2)^{n+1}(2-4) \\ &= 4^{n+2} - (-2)^{n+2}. \end{aligned}$$

Donc $P(n+2)$ est aussi vraie.
Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 4^n - (-2)^n.}$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 6$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 8u_n$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4^n - (-2)^n$.

Question 5. Je vous présente pour chaque question deux méthodes de résolution. Par analyse-synthèse ou directement par équivalences. N'hésitez pas à vous entrainer sur les deux.

5.1 **Par analyse-synthèse :** soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2-1} = x+2 &\Rightarrow x^2 - 1 = (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4 \\ &\Rightarrow 4x = -5 \\ &\Rightarrow x = -\frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Synthèse : de plus si $x = -\frac{5}{4}$, on a $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\frac{25}{16} - 1} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$ et $x + 2 = -\frac{5}{4} + 2 = \frac{3}{4}$ donc $-\frac{5}{4}$ est une solution. Conclusion,

$$\boxed{\sqrt{x^2-1} = x+2 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{4}}.$$

Par équivalences : soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2-1} = x+2 &\Leftrightarrow x^2 - 1 = (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4 \text{ ET } x^2 - 1 \geqslant 0 \text{ ET } x + 2 \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow 4x = -5 \text{ ET } x^2 \geqslant 1 \text{ ET } x \geqslant -2 \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{5}{4} \text{ ET } x^2 \geqslant 1 \text{ ET } x \geqslant -2 \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{5}{4} \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\sqrt{x^2-1} = x+2 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{4}}.$$

5.2 **Par analyse-synthèse :** soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} = \sqrt{2x+1} &\Rightarrow x - 1 = 2x + 1 \\ &\Rightarrow x = -2. \end{aligned}$$

Synthèse : de plus si $x = -2$, on a $\sqrt{x-1} = \sqrt{-3}$ n'existe pas !
Conclusion, $\boxed{\text{cette équation n'admet aucune solution}}$.
Par équivalences : soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} = \sqrt{2x+1} &\Leftrightarrow x - 1 = 2x + 1 \text{ ET } x - 1 \geqslant 0 \text{ ET } 2x + 1 \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow x = -2 \text{ ET } x \geqslant 1 \text{ ET } x \geqslant -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

ce qui est impossible. Conclusion, $\boxed{\text{cette équation n'admet aucune solution}}$.

5.3 **Par analyse-synthèse :** soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\sqrt{x+5}=\sqrt{2x+2} &\Rightarrow x+5=2x+2\\ &\Rightarrow x=3.\end{aligned}$$

Synthèse : de plus si $x=3$, on a $\sqrt{x+5}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ et $\sqrt{2x+2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$. Donc $x=3$ est une solution. Conclusion,

$$\boxed{\sqrt{x+5}=\sqrt{2x+2} \qquad \Leftrightarrow \qquad x=3.}$$

Par équivalences : soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\sqrt{x+5}=\sqrt{2x+2} \quad&\Leftrightarrow\quad x+5=2x+2 \text{ ET } x+5 \geqslant 0 \text{ ET } 2x+2 \geqslant 0\\ &\Leftrightarrow\quad x=3 \text{ ET } x \geqslant -5 \text{ ET } x \geqslant -1\\ &\Leftrightarrow\quad x=3.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\sqrt{x+5}=\sqrt{2x+2} \qquad \Leftrightarrow \qquad x=3.}$$

5.4 **Par analyse-synthèse :** soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\sqrt{2x^2-x-3}=x+1 &\Rightarrow 2x^2-x-3=x^2+2x+1\\ &\Rightarrow x^2-3x-4=0.\end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant associé, $\Delta=9+16=25$. Donc $x=\frac{3+5}{2}=4$ ou $x=\frac{3-5}{2}=-1$. Synthèse : si $x=4$, on a $\sqrt{2x^2-x-3}=\sqrt{32-4-3}=5=x+1$ Donc $x=4$ est une solution. Si $x=-1$, alors $\sqrt{2x^2-x-3}=\sqrt{2+1-3}=0=-1+1$ Conclusion,

$$\boxed{\sqrt{2x^2-x-3}=x+1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x=4 \text{ OU } x=-1.}$$

Par équivalences : soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\sqrt{2x^2-x-3}=x+1 \quad&\Leftrightarrow\quad 2x^2-x-3=x^2+2x+1 \text{ ET } 2x^2-x-3 \geqslant 0 \text{ ET } x+1 \geqslant 0\\ &\Leftrightarrow\quad x^2-3x-4=0 \text{ ET } 2x^2-x-3 \geqslant 0 \text{ ET } x \geqslant -1.\end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant de $x^2-3x-4=0$, on a $\Delta=9+16=25$. Donc les racines associées sont $\frac{3+5}{2}=4$ et $\frac{3-5}{2}=-1$. De plus, si Δ' le discriminant de $2x^2-x-3$, $\Delta'=1+24=25$. Donc les racines associées sont $\frac{1-5}{4}=-1$ et $\frac{1+5}{4}=\frac{3}{2}$. Ainsi

$$\begin{aligned}\sqrt{2x^2-x-3}=x+1 \quad&\Leftrightarrow\quad (x=-1 \text{ OU } x=4) \text{ ET } \left(x \leqslant -1 \text{ OU } x \geqslant \frac{3}{2}\right) \text{ ET } x \geqslant -1\\ &\Leftrightarrow\quad x=-1 \text{ OU } x=4\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\sqrt{2x^2-x-3}=x+1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x=4 \text{ OU } x=-1.}$$

5.5 **Par analyse-synthèse :** soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}x=-1+\sqrt{x^2-2} &\Rightarrow x+1=\sqrt{x^2-2}\\ &\Rightarrow x^2+2x+1=x^2-2\\ &\Rightarrow x=-\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Synthèse : si $x=-\frac{3}{2}$, on a $\sqrt{x^2-2}=\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{8}{4}}=\frac{1}{2}\neq-\frac{1}{2}=1+x$ Donc $x=-\frac{3}{2}$ n'est pas solution. Conclusion, $\boxed{x=-1+\sqrt{x^2-2} \text{ n'admet aucune solution}}$.

Par équivalences : soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}x=-1+\sqrt{x^2-2} \quad&\Leftrightarrow\quad x+1=\sqrt{x^2-2}\\ &\Leftrightarrow\quad x^2+2x+1=x^2-2 \text{ ET } x+1 \geqslant 0 \text{ ET } x^2-2\\ &\Leftrightarrow\quad x=-\frac{3}{2} \text{ ET } x \geqslant -1 \text{ ET } x^2 \geqslant 2,\end{aligned}$$

ce qui est impossible. Conclusion, $\boxed{x=-1+\sqrt{x^2-2} \text{ n'admet aucune solution}}$.