Programme de colles 02
Nombres complexes et calcul dans R

Quinzaine du 28 septembre au 09 octobre

Nombres complexes

1. Nombres complexes, propriétés élémentaires, partie réelle, imaginaire.
2. Représentation graphique, plan complexe, affixe d'un point, d'un vecteur.
3. Conjugaison, propriétés, interprétation graphique. Caractérisation des réels, des imaginaires purs par la conjugaison.
4. Module d'un complexe, propriétés, $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$, $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$.
5. Module au carré d'une somme, inégalité triangulaire (inférieure et supérieure).
6. Complexes de module 1, stabilité par produit, inverse/conjugué.
7. Définition de l'exponentielle complexe, propriétés. Formules d'Euler, formule de Moivre. Les étudiants doivent être capable de factoriser une somme d'exponentielles par l'angle moitié.
8. Argument d'un nombre complexe, forme polaire/trigonométrique, « unicité » de l'écriture. Propriétés de l'argument. Interprétation graphique avec l'angle entre deux vecteurs.

Calculs dans $\mathbb{R}$

1. Définition des ensembles de base $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.
2. Propriétés élémentaires de la relation d'ordre $\leqslant$ compatibilité avec $+$, $\times$, le passage à l'inverse, le carré.
3. Définition du majorant, minorant, partie majorée, minorée, bornée.
4. Définition du maximum, minimum, borne supérieure, borne inférieure.
5. Théorème (admis) : toute partie non vide et majorée admet une borne supérieure. Caractérisation de la borne supérieure. De même pour la borne inférieure.
   Pas d'exercice trop théorique !
6. Définition d'un intervalle et classification des intervalles.
7. Propriété d'Archimède, définition de la partie entière, graphe et propriétés élémentaires.
8. Valeur absolue, graphe et propriétés élémentaires.
9. Distance entre deux réels, inégalité triangulaire.
10. Résolutions d'équations, d'inéquations avec valeur absolue et/ou racine carrée.

Questions de cours

1. Démonstration de $|z+z'|^2 = \dots$ et de l'inégalité triangulaire supérieure.
2. Démontrer $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'} \quad \Leftrightarrow \quad \dots$
3. Déterminer l'ensemble des intervalles non vides, non réduits à un singleton et bornés de $\mathbb{R}$.
4. Montrer qu'un ensemble est borné si et seulement si l'ensemble de ses valeurs absolues est majoré.