Programme de colles 07
Systèmes linéaires, ensembles et applications

Quinzaine du 04 au 14 janvier

Systèmes linéaires

1. Définition d'un système linéaire, homogène, compatible, incompatible.
2. Opérations élémentaires en lignes.
3. Système échelonné, pivots, inconnues principales, secondaires/paramètres. Rang d'un système.
4. Méthode du pivot de Gauss et résolution d'un système échelonné.
5. Nombre de solutions. Ensemble solution sous forme ensembliste et vectorielle $\text{Vect}(\dots)$ (les espaces vectoriels n'ont pas encore été traités).
6. Interprétation géométrique d'un système en dimension 2 ou 3 (intersection de droites ou de plans).
7. Définition des matrices $E_{kl} = (\delta_{ik}\delta_{jl})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}$, matrices élémentaires (transposition, dilatation, transvection) et correspondance avec les opérations élémentaires.
8. Matrice échelonnée en lignes, matrice échelonnée réduite en lignes.
9. Rang d'une matrice. Lien entre le rang de la matrice et de la matrice augmentée avec le nombre de solutions.
10. Caractérisation de l'inversibilité par le rang, l'équivalence à la matrice I_n ou l'existence d'une solution de $AX = 0_{n,1}$ ou $AX = B$.
11. Calcul de l'inverse par le calcul de la réduite.
12. Bref complément aux opérations en colonnes.

Ensembles et applications

1. **Ensembles :** A partir de l'appartenance, définition de l'inclusion et de l'égalité de deux ensembles. L'inclusion est réflexive, transitive et antisymétrique.
2. Définition d'une partie d'un ensemble E et de l'ensemble des parties de E, noté $\mathscr{P}(E)$.
3. Intersection et union : définition, commutativité, associativité. Ensembles disjoints.
4. Complémentaire $C_E(A)$, différence de deux ensembles. Propriétés (lois de Morgan...).
5. Produit cartésien d'ensembles.
6. **Applications :** définition, image, antécédent, graphe.
7. Application identité, fonctions indicatrices.
8. Composition, restriction, prolongement.
9. Image directe, image réciproque. Image directe et réciproque de l'union, de l'intersection.
10. Injection, surjection, bijection.
11. Relation binaire. Relation réflexive, symétrique, transitive, antisymétrique.
12. Relation d'équivalence et classe d'équivalence.

Questions de cours

On demandera à chaque étudiant de réciter un développement usuel (e^x, $\text{ch}(x)$, $\text{sh}(x)$, $\cos(x)$, $\sin(x)$, $tan(x)$, $\ln(1+x)$, $\ln(1-x)$, $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1+x}$, $(1+x)^\alpha$, $\arctan(x)$) à un ordre autour de 4 ou 5 puis de restituer une démonstration parmi celles ci-dessous.

1. Soit $\mathcal{R}$ est relation d'équivalence. Démontrer que $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow Cl(x) = Cl(y) \Leftrightarrow Cl(x) \cap Cl(y) \neq \emptyset$.
2. Démontrer les deux assertions suivantes :

   1. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ 2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

3. Soit $c > 1$. Démontrer que $c^n \underset{n\to+\infty}{\ll} n!$

Proposition

Soit $c > 1$. On a
$$c^n \underset{n\to+\infty}{\ll} n!$$

Démonstration. Montrons que $(c^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $c > 1$, i.e. que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{c^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 en $+\infty$. Notez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n! \geqslant 1 > 0$. De plus, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 \geqslant c$ (prendre par exemple $\lfloor c \rfloor + 1$).

- Montrons que la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0+1}$ est majorée. Soit $n \geqslant n_0 + 1 \geqslant c$, on a
$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{c}{k} = \underbrace{\prod_{k=1}^{n_0} \frac{c}{k}}_{=A_{n_0}} \prod_{k=n_0+1}^{n} \frac{c}{k}.$$
Pour tout $k \geqslant n_0 + 1 \geqslant c$, on a $\frac{c}{k} \leqslant 1$. Donc, par positivité des termes manipulés, pour tout $n \geqslant n_0 + 1 \geqslant c$,
$$u_n \leqslant A_{n_0} \times \prod_{k=n_0+1}^{n} 1 = A_{n_0},$$
où $A_{n_0} = \prod_{k=1}^{n_0} \frac{c}{k}$ est un réel qui ne dépend que de n_0 et non de n. Donc la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0+1}$ est majorée par A_{n_0}.
- Soit $n \geqslant n_0 + 2$, on a alors
$$0 \leqslant u_n = u_{n-1} \times \frac{c}{n} \leqslant A_{n_0} \times \frac{c}{n}, \qquad \text{car } \frac{c}{n} > 0 \text{ et } u_{n-1} \leqslant A_{n_0}.$$
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} A_{n_0} \frac{c}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$. Donc par le théorème d'encadrement
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$
Conclusion,
$$\boxed{c^n = o(n!)\,.}$$

□