Corrigé du Devoir Maison 10
Espaces vectoriels - Séries numériques

Exercice I - Espaces vectoriels de fonctions

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit dans $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(nx) \end{array} \qquad \text{et} \qquad g_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos^n(x)\,. \end{array}$$

On pose également pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n = \text{Vect}(f_0, \dots, f_n) \qquad \text{et} \qquad G_n = \text{Vect}(g_0, \dots, g_n)\,.$$

Partie 1 : Cas $n = 2$

On suppose dans cette partie que $n = 2$.

1. Pour $k = 0$, on a $f_0 : x \mapsto \cos(0) = 1 = \cos^0(x)$. Donc $f_0 = g_0$. Ainsi,

$$f_0 = g_0 \in \text{Vect}(g_0, g_1, g_2) = G_2.$$

Pour $k = 1$, on a de même $f_1 : x \mapsto \cos(x) = \cos^1(x)$. Donc $f_1 = g_1$. Ainsi,

$$f_1 = g_1 \in \text{Vect}(g_0, g_1, g_2) = G_2.$$

Enfin, pour $k = 2$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_2(x) = \cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = 2g_2(x) - g_0(x).$$

Donc

$$f_2 = 2g_2 - g_0 \in \text{Vect}(g_0, g_1, g_2) = G_2.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall k \in \{0, 1, 2\}\,, \quad f_k \in G_2.}$$

2. Soit $f \in F_2 = \text{Vect}(f_0, f_1, f_2)$. Alors, il existe $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$f = \lambda_0\, f_0 + \lambda_1\, f_1 + \lambda_2\, f_2.$$

Or par la question précédente, f_0, f_1 et f_2 sont trois éléments de G_2. De plus G_2 est un espace vectoriel et est donc stable par combinaisons linéaires. Ainsi, $f \in G_2$. Ceci étant vrai pour tout $f \in F_2$, on conclut que

$$\boxed{F_2 \subseteq G_2.}$$

3. Montrons que $\mathscr{G}_2 = (g_0, g_1, g_2)$ est une base de G_2. Par définition de G_2, on sait déjà que $\mathscr{G}_2$ engendre G_2. Montrons que $\mathscr{G}_2$ est libre. Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\lambda_0\, g_0 + \lambda_1\, g_1 + \lambda_2\, g_2 = 0_E = 0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}.$$

Autrement dit

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 0_{\mathbb{R}} = \lambda_0\, g_0(x) + \lambda_1\, g_1(x) + \lambda_2\, g_2(x) = \lambda_0 + \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \cos^2(x)\,.$$

En particuliers pour $x = 0$, $\frac{\pi}{2}$ et π respectivement, on obtient que

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_0 = 0 \\ \lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_0 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\,\lambda_2 = 0 \\ \lambda_0 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \qquad L_1 \leftarrow L_1 + L_3$$

$$\Leftrightarrow \lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

D'où, on a bien que $\mathscr{G}_2$ est une famille libre et génératrice dans G_2 et est donc une base de G_2. Conclusion,

$$\boxed{\dim(G_2) = \mathrm{Card}(\mathscr{G}_2) = 3.}$$

Puisque l'on sait que $F_2 \subseteq G_2$, on en déduit alors que

$$\boxed{\dim(F_2) \leqslant \dim(G_2) = 3.}$$

4. On pose $\mathscr{F}_2 = (f_0, f_1, f_2)$. Montrons que $\mathscr{F}_2$ est une base de F_2. On sait déjà par définition que $\mathscr{F}_2$ engendre F_2. Montrons donc que F_2 est libre. Soient $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\lambda_0\, f_0 + \lambda_1\, f_1 + \lambda_2\, f_2 = 0_E = 0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}.$$

On a déjà vu que $f_0 = g_0$, $f_1 = g_1$ et $f_2 = 2g_2 - g_0$. Par conséquent,

$$0_E = \lambda_0\, g_0 + \lambda_1\, g_1 + \lambda_2\,(2g_2 - g_0) = (\lambda_0 - \lambda_2)\, g_0 + \lambda_1\, g_1 + 2\,\lambda_2\, g_2.$$

Or nous avons déjà vu que $\mathscr{G}_2 = (g_0, g_1, g_2)$ est une famille libre. Ainsi,

$$\begin{cases} \lambda_0 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ 2\,\lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Donc $\mathscr{F}_2$ est libre. Or elle engendre F_2 donc $\mathscr{F}_2$ est une base de F_2. Conclusion,

$$\boxed{\dim(F_2) = \mathrm{Card}(\mathscr{F}_2) = 3.}$$

5. Par ce qui précède, on a $F_2 \subseteq G_2$ et $\dim(F_2) = 3 = \dim(G_2)$. Conclusion,

$$\boxed{F_2 = G_2.}$$

Partie 2 : Une inclusion

On suppose à nouveau $n \in \mathbb{N}$ quelconque.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 2f_{n+1}(x)f_1(x) - f_n(x) &= 2\cos((n+1)\,x)\cos(x) - \cos(nx) \\ &= \cos((n+1)\,x + x) + \cos((n+1)\,x - x) - \cos(nx) \\ &= \cos((n+2)\,x) + \cos(nx) - \cos(nx) \\ &= \cos((n+2)\,x) \\ &= f_{n+2}(x). \end{aligned}$$

Conclusion, on a bien montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f_{n+2} = 2f_{n+1}f_1 - f_n.}$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $f_{n+1} \in G_{n+1} = \text{Vect}\,(g_0, g_1, \ldots, g_{n+1})$. Alors il existe $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}$ tel que $f_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k \, g_k$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) f_1(x) &= \sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k \, g_k(x) f_1(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k \cos^k(x) \cos(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k \cos^{k+1}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k \, f_{k+1}(x) \in \text{Vect}\,(f_1, \ldots, f_{n+2}) \subseteq \text{Vect}\,(f_0, f_1, \ldots, f_{n+2}) = G_{n+2}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f_{n+1} \in G_{n+1} \ \Rightarrow\ f_{n+1} f_1 \in G_{n+2}.}$$

8. On procède par une récurrence double. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{P}(n)$: « $f_n \in G_n$ ».

Initialisation. Si $n = 0$, on a $f_0 = g_0 \in G_0$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Si $n = 1$, on a $f_1 = g_1 \in G_1$ et donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $(\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)) \Rightarrow \mathscr{P}(n+2)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$. Montrons que $\mathscr{P}(n+2)$ est aussi vraie. Par hypothèse de récurrence, on a $f_n \in G_n$ et $f_{n+1} \in G_{n+1}$. Par la question précédente, puisque $f_{n+1} \in G_{n+1}$, on en déduit que $f_{n+1} f_1 \in G_{n+2}$. De plus, on remarque que

$$G_n = \text{Vect}\,(f_0, \ldots, f_n) \subseteq \text{Vect}\,(f_0, \ldots, f_n, f_{n+1}) = G_{n+1} \subseteq \text{Vect}\,(f_0, \ldots, f_n, f_{n+1}, f_{n+2}) = G_{n+2}.$$

Donc $f_n \in G_{n+2}$. Or G_{n+2} est un espace vectoriel et est donc stable par différence. Donc

$$f_{n+1} f_1 - f_n \in G_{n+2}.$$

Par la question 6., on en déduit que $f_{n+2} \in G_{n+2}$, ce qui démontre $\mathscr{P}(n+2)$.

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie i.e.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f_n \in G_n.}$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, on vient donc de montrer que $f_k \in G_k$. Or on a également l'inclusion directe

$$\forall k \in [\![0; n]\!], \qquad G_k = \text{Vect}\,(g_0, \ldots, g_k) \subseteq \text{Vect}\,(g_0, \ldots, g_k, \ldots, g_n) = G_n.$$

Donc pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, $f_k \in G_n$ et G_n est un espace vectoriel. Or $F_n = \text{Vect}\,(f_0, \ldots, f_n)$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) espace vectoriel contenant $f_0, \ldots, f_n$. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad F_n \subseteq G_n.}$$

Partie 3 : Dimension des F_n.

On souhaite démontrer par deux méthodes que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $\mathscr{F}_n = (f_0, \ldots, f_n)$ est libre.

Méthode 1.

On pose pour tout $(k, l) \in \mathbb{N}^2$, $I_{k,l} = \int_0^{2\pi} f_k(t) f_l(t) \, \mathrm{d}t$.

10. Soit $(l,k)\in\mathbb{N}^2$. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}I_{k,l}&=\int_0^{2\pi} f_k(t)f_l(t)\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^{2\pi}\cos(kt)\cos(lt)\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos((k+l)\,t)+\cos((k-l)\,t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Premier cas, si $l\neq k$. Alors, $k+l\neq 0$ et $k-l\neq 0$, et donc on a

$$\begin{aligned}I_{k,l}&=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin((k+l)\,t)}{l+k}+\frac{\sin((k-l)\,t)}{k-l}\right]_{t=0}^{t=2\pi}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin((k+l)\,2\pi)}{l+k}+\frac{\sin((k-l)\,2\pi)}{k-l}-\frac{\sin(0)}{l+k}-\frac{\sin(0)}{k-l}\right)\\&=0.\end{aligned}$$

Deuxième cas, si $l=k\neq 0$. Alors,

$$\begin{aligned}I_{l,l}&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(2kt)+\cos(0)\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2kt)}{2k}+t\right]_{t=0}^{t=2\pi}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(2k\pi)}{2k}+2\pi-0\right)\\&=\pi.\end{aligned}$$

Enfin, troisième cas, si $l=k=0$ et alors,

$$I_{0,0}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}2\,\mathrm{d}t=2\pi.$$

Conclusion,

$$\forall\,(k,l)\in\mathbb{N}^2,\qquad I_{k,l}=\begin{cases}0 \text{ si } k\neq l\\ \pi \text{ si } l=k\neq 0\\ 2\pi \text{ si } l=k=0.\end{cases}$$

11. Soient $(\lambda_0,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$ et $l\in[\![0;n]\!]$. Par la question précédente, on a

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=0}^n\lambda_k\,f_k(t)\right)f_l(t)\,\mathrm{d}t&=\sum_{k=0}^n\lambda_k\int_0^{2\pi}f_k(t)f_l(t)\,\mathrm{d}t &&\text{par linéarité de l'intégrale}\\&=\sum_{k=0}^n\lambda_k\,I_{k,l}\\&=\lambda_l\,I_{l,l}+\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\k\neq l}}\lambda_k\,I_{k,l}\\&=\begin{cases}\lambda_l\,\pi \text{ si } l=0\\2\,\lambda_l\,\pi \text{ si } l\neq 0\end{cases} &&\text{d'après la question précédente.}\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=0}^n\lambda_k\,f_k(t)\right)f_l(t)\,\mathrm{d}t=\begin{cases}\lambda_l\,\pi \text{ si } l=0\\2\,\lambda_l\,\pi \text{ si } l\neq 0.\end{cases}}$$

12. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que
$$\lambda_0\, f_0 + \cdots + \lambda_n\, f_n = 0_E = 0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}.$$
En particulier pour $t \in [0; 2\pi]$,
$$\lambda_0\, f_0(t) + \cdots + \lambda_n\, f_n(t) = 0.$$
Soit $l \in [\![0; n]\!]$, alors, on a
$$\forall t \in [0; 2\pi]\,, \qquad \left(\sum_{k=0}^{n} f_k(t)\right) f_l(t) = 0.$$
Donc par intégration,
$$\int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k\, f_k(t)\right) f_l(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 0\,\mathrm{d}t = 0.$$
Donc par la question précédente, si $l = 0$, $\lambda_l\, \pi = 0$ i.e. $\lambda_l = 0$ et de même si $l \neq 0$, $2\,\lambda_l\, \pi = 0$ et donc $\lambda_l = 0$. Ceci étant vrai pour $l \in [\![0; n]\!]$ quelconque, on en déduit que
$$\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathscr{F}_n \text{ est libre.}}$$

Méthode 2.
Soient $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i\, f_i(x) \end{array}$$

13. Soit $p \in \mathbb{N}$. On sait que $\cos(u) \underset{u \to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k\, u^{2k}}{(2k)!} + o\left(u^{2p}\right)$. Donc en posant $u = ix \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$, on obtient que
$$\boxed{f_i(x) = \cos(ix) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k\, i^{2k} x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2p}\right).}$$
D'autre part, la fonction f_i étant $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et donc $\mathscr{C}^{2p}$ au voisinage de 0, on en déduit par la formule de Taylor-Young,
$$f_i(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{2p} \frac{f_i^{(k)}(0)}{k!} x^k + o\left(x^{2p}\right).$$
Par unicité du développement limité, on obtient que
$$\frac{f_i^{(2p)}(0)}{(2p)!} = \frac{(-1)^n\, i^{2p}}{(2p)!} \qquad \Leftrightarrow \qquad f_i^{(2p)}(0) = (-1)^p\, i^{2p}.$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \qquad f_i^{(2p)}(0) = (-1)^p\, i^{2p}.}$$

14. Soit $p \in \mathbb{N}$. La fonction f est $2p$-fois dérivable comme combinaison linéaire de fonctions qui le sont et par la question précédente,
$$f^{(2p)}(0) = (-1)^p \sum_{k=0}^{n} \lambda_k\, k^{2p}.$$
On note que la somme est fixe et ne dépend pas de p. De plus, si $n \geqslant 1$, pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, on a
$$\frac{k^{2p}}{n^{2p}} \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{car } 0 \leqslant \frac{k}{n} < 1$$

Autrement dit, $\forall k \in [\![0;n-1]\!]$, $k^{2p} \underset{p\to+\infty}{\ll} n^{2p}$. Et puisque la somme est finie et fixe, on en déduit que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \, k^{2p} \underset{p\to+\infty}{=} \lambda_n \, n^{2p} + o\left(n^{2p}\right).$$

ATTENTION!!! Il ne faut pas écrire $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \, k^{2p} \underset{p\to+\infty}{\sim} \lambda_n \, n^{2p}$ *car personne n'a dit que* $\lambda_n \neq 0$*...*
Ainsi,

$$f^{(2p)}(0) \underset{p\to+\infty}{=} (-1)^p \, \lambda_n \, n^{2p} + o\left(n^p\right).$$

On note que le résultat est encore vrai si $n = 0$. Conclusion,

$$\boxed{f^{(2p)}(0) \underset{p\to+\infty}{\sim} (-1)^p \, n^{2p} + o\left(n^p\right).}$$

15. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{F}_n$ est libre. Soient $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \, f_k = 0_E.$$

Ainsi, avec les notations des questions précédentes, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0_{\mathbb{R}}$. Donc pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{(2p)}(0) = 0$. Or on sait également que

$$f^{(2p)}(0) \underset{p\to+\infty}{=} (-1)^p \, \lambda_n \, n^{2p} + o\left(n^p\right).$$

Supposons $\lambda_n \neq 0$, alors, on obtient que

$$0 = f^{(2p)}(0) \underset{p\to+\infty}{\sim} (-1)^p \, \lambda_n \, n^{2p} \neq 0.$$

Ce qui est absurde (nul autre que la suite nulle n'est équivalente à la suite nulle). Donc $\lambda_n = 0$. Alors, on obtient que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \, f_k = 0_E.$$

En réitérant le raisonnement en posant $f = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \, f_k$, on obtient que $\lambda_{n-1} = 0$ puis $\lambda_{n-2} = 0$ puis par récurrence :

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = \lambda_n = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathscr{F}_n \text{ est libre.}}$$

Partie 4 : La dimension, c'est béton

16. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la question précédente, on sait que $\mathscr{F}_n$ est libre et par définition de F_n, elle engendre F_n. Donc $\mathscr{F}_n$ est une base de F_n. Conclusion,

$$\boxed{\dim\left(F_n\right) = \operatorname{Card}\left(\mathscr{F}_n\right) = n+1.}$$

17. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 9., on sait que $F_n \subseteq G_n$. Par conséquent,

$$\dim\left(G_n\right) \geqslant \dim\left(F_n\right) = n+1.$$

D'autre part, par définition, on sait que $\mathscr{G}_n = (g_0, \ldots, g_n)$ est une famille génératrice de G_n. Donc

$$\dim\left(G_n\right) \leqslant \operatorname{Card}\left(\mathscr{G}_n\right) = n+1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \dim\left(G_n\right) = n+1.}$$

18. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons à nouveau $\mathscr{G}_n = (g_0, \ldots, g_n)$. On sait que $\mathscr{G}_n$ est génératrice dans G_n et par la question précédente, $\text{Card}(\mathscr{G}_n) = n + 1 = \dim(G_n)$. Par conséquent,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathscr{G}_n = (g_0, \ldots, g_n) \text{ est une base de } G_n.}$$

19. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n \subseteq G_n$ et que $\dim(F_n) = n + 1 = \dim(G_n)$. Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad F_n = G_n.}$$

20. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $H_n = \text{Vect}(g_{n+1}, \ldots, g_{2n})$. Posons $\mathscr{G}_{2n} = (g_0, \ldots, g_{2n})$ et $\mathscr{H}_n = (g_{n+1}, \ldots, g_{2n})$. La famille $\mathscr{H}_n$ est une sous-famille de $\mathscr{G}_{2n}$. Or par la question 18., on sait que $\mathscr{G}_{2n}$ est une base de G_{2n} et est donc une famille libre. Donc $\mathscr{H}_n$ est libre. De plus par définition, elle engendre H_n donc $\mathscr{H}_n$ est une base de H_n. On sait que $\mathscr{G}_n$ est une base de G_n et que $G_n = F_n$. Donc $\mathscr{G}_n$ est une base de F_n. Enfin on observe que $\mathscr{G}_n \cup \mathscr{H}_n = \mathscr{G}_{2n}$ est une base de $G_{2n} = F_{2n}$. Résumons :

   - $\mathscr{G}_n$ est une base de F_n,
   - $\mathscr{H}_n$ est une base de H_n,
   - $\mathscr{G}_n \cup \mathscr{H}_n$ est une base de $G_{2n} = F_{2n}$.

   Conclusion, par le théorème de la base adaptée,

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, F_n \text{ et } G_n \text{ sont supplémentaires dans } F_{2n} : F_n \oplus H_n = F_{2n}.}$$

21. Supposons que E est de dimension finie. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n est un sous-espace vectoriel de E et que $\dim(F_n) = n + 1$. On en déduit donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n + 1 = \dim(F_n) \leqslant \dim(E).$$

   Donc par passage à la limite,

$$\dim(E) = +\infty.$$

   Contradiction. Conclusion,

$$\boxed{\text{L'espace } E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ est de dimension infinie.}}$$

Exercice II - Séries du sinus cardinal

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{\sin(n)}{n}.$$

Partie 1 : Echauffement

1. Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a,

$$0 \leqslant |u_n^p| = \left|\frac{\sin^p(n)}{n^p}\right| \leqslant \frac{1}{n^p}.$$

Or $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^p}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = p > 1$. Donc par le théorème de comparaison, on en déduit que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} |u_n^p| \text{ converge.}$$

Autrement dit $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n^p$ converge absolument. Or la convergence absolue implique la convergence. Conclusion,

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ p \geqslant 2, \qquad \sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n^p \text{ converge.}}$$

Partie 2 : Transformée d'Abel

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites. On pose pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $B_N = \sum_{k=1}^{n} b_k$.

2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $N \geqslant 2$. Calculons,

$$a_N B_N - \sum_{n=1}^{N-1} B_n (a_{n+1} - a_n) = a_N B_N - \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{n} b_k (a_{n+1} - a_n)$$

On reconnaît alors une somme double triangulaire :

$$\begin{aligned} a_N B_N - \sum_{n=1}^{N-1} B_n (a_{n+1} - a_n) &= a_N B_N - \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{n=k}^{N-1} b_k (a_{n+1} - a_n) \\ &= a_N B_N - \sum_{k=1}^{N-1} b_k \sum_{n=k}^{N-1} (a_{n+1} - a_n). \end{aligned}$$

On reconnaît alors une somme télescopique :

$$\begin{aligned} a_N B_N - \sum_{n=1}^{N-1} B_n (a_{n+1} - a_n) &= a_N B_N - \sum_{k=1}^{N-1} b_k (a_N - a_k) \\ &= a_N B_N - a_N \sum_{k=1}^{N-1} b_k + \sum_{k=1}^{N-1} b_k a_k \\ &= a_N \sum_{k=1}^{N} b_k - a_N \sum_{k=1}^{N-1} b_k + \sum_{k=1}^{N-1} b_k a_k \\ &= a_N b_N + \sum_{k=1}^{N-1} a_k b_k \\ &= \sum_{k=1}^{N} a_k b_k. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall N \in \mathbb{N}^*,\ N \geqslant 2, \qquad a_N B_N - \sum_{n=1}^{N-1} B_n \left(a_{n+1} - a_n\right) = \sum_{n=1}^{N} a_n b_n.}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sin(k) = \operatorname{Im}\left(e^{ik}\right)$. Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(k) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Im}\left(e^{ik}\right) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ik}\right) \qquad \text{par la } \mathbb{R}\text{-linéarité de la partie imaginaire.}$$

On reconnaît alors une somme géométrique de raison $e^{i} \neq 1$. Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \sin(k) &= \operatorname{Im}\left(e^{i}\, \frac{1 - e^{ni}}{1 - e^{i}}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(e^{i}\, \frac{e^{\frac{ni}{2}}}{e^{\frac{i}{2}}}\, \frac{e^{-\frac{ni}{2}} - e^{\frac{ni}{2}}}{e^{-\frac{i}{2}} - e^{\frac{i}{2}}}\right) && \text{par factorisation par l'angle moitié} \\
&= \operatorname{Im}\left(e^{\frac{(n+1)i}{2}}\, \frac{-2i \sin\left(\frac{n}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{1}{2}\right)}\right) && \text{par la formule d'Euler} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{n}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)} \operatorname{Im}\left(e^{\frac{(n+1)i}{2}}\right) && \text{car } \frac{\sin\left(\frac{n}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)} \in \mathbb{R} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{n}{2}\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} \sin(k) = \frac{\sin\left(\frac{n}{2}\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}.}$$

4. Donc par la question précédente, on obtient que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \left|\sum_{k=1}^{n} \sin(k)\right| = \left|\frac{\sin\left(\frac{n}{2}\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}\right| \leqslant \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)} \qquad \text{car } 0 < \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2} \text{ et donc } \sin\left(\frac{1}{2}\right) > 0.$$

Or $\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}$ est indépendant de n. Donc constitue bien un majorant de $\left(\left|\sum_{k=1}^{n} \sin(k)\right|\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Conclusion,

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \sin(n) \text{ est bornée.}}$$

5. Puisque $n+1 \geqslant n$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\frac{1}{n\,(n+1)} \sum_{k=1}^{n} \sin(k)\right| \leqslant \frac{1}{n^2} \left|\sum_{k=1}^{n} \sin(k)\right|.$$

Donc par la question précédente, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leqslant \left|\frac{1}{n\,(n+1)} \sum_{k=1}^{n} \sin(k)\right| \leqslant \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2}\right) n^2}.$$

Or la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2}\right) n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Donc par le théorème de comparaison, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left|\frac{1}{n\,(n+1)} \sum_{k=1}^{n} \sin(k)\right|$ converge autrement dit $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n\,(n+1)} \sum_{k=1}^{n} \sin(k)$ converge absolument. Or la convergence absolue implique la convergence. Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n\,(n+1)} \sum_{k=1}^{n} \sin(k) \text{ converge.}}$$

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $a_n = \frac{1}{n}$ et $b_n = \sin(n)$. Alors par la question 2., on a pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $N \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} u_n &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\sin(n)\\ &= \frac{1}{N}\sin(N) - \sum_{n=1}^{N-1}\left(\sum_{k=1}^{n}\sin(k)\right)\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)\\ &= \frac{\sin(N)}{N} - \sum_{n=1}^{N-1}\left(\sum_{k=1}^{n}\sin(k)\right)\frac{n-n-1}{(n+1)\,n}\\ &= \frac{\sin(N)}{N} + \sum_{n=1}^{N-1}\left(\frac{1}{(n+1)\,n}\sum_{k=1}^{n}\sin(k)\right).\end{aligned}$$

Or par la question précédente, $\left(\sum_{n=1}^{N-1}\left(\frac{1}{(n+1)\,n}\sum_{k=1}^{n}\sin(k)\right)\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge. De plus pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leqslant \left|\frac{\sin(N)}{N}\right| \leqslant \frac{1}{N}$$

et $\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} = 0$. Donc par le théorème d'encadrement, $\lim_{N\to+\infty} \frac{\sin(N)}{N} = 0$ et en particulier converge. Alors en tant que somme de deux suites convergentes, on conclut que

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \text{ converge.}}$$

Partie 3 : Lemme de Riemann-Lebesgue

On pose pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $f_\lambda : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(\lambda\, x) \end{array}$. Soit $f \in \mathscr{C}^1([0;1], \mathbb{R})$.

7. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Les fonctions $v = f$ et $u : t \mapsto \frac{\sin(\lambda\, t)}{\lambda}$ sont $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$ et pour tout $t \in [0;1]$,

$$u'(t) = \cos(\lambda\, t) = f_\lambda(t) \qquad \text{et} \qquad v'(t) = f'(t).$$

Donc par le théorème d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t)f_\lambda(t)\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{\sin(\lambda\, t)}{\lambda}f(t)\right]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 \frac{\sin(\lambda\, t)}{\lambda}f'(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{\sin(\lambda)}{\lambda}f(1) - 0 - \frac{1}{\lambda}\int_0^1 f'(t)\sin(\lambda\, t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall\, \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \int_0^1 f(t)f_\lambda(t)\,\mathrm{d}t = \frac{f(1)\sin(\lambda)}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\int_0^1 f'(t)\sin(\lambda\, t)\,\mathrm{d}t.}$$

8. La fonction f est $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$. Donc f' est continue sur le segment $[0;1]$. Or toute fonction continue sur un segment est bornée (et atteint ses bornes). Donc

$$\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall t \in [0;1], \qquad |f'(t)| \leqslant M.$$

Or pour tout $t \in [0;1]$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $|\sin(\lambda\, t)| \leqslant 1$. Ainsi,

$$\forall t \in [0;1],\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \qquad |f'(t)\sin(\lambda\, t)| \leqslant M \times 1 = M.$$

Conclusion,

$$\boxed{\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall t \in [0;1],\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \qquad |f'(t)\sin(\lambda\, t)| \leqslant M.}$$

9. Par la question question précédente, on sait qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$, tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $t \in [0;1]$,
$$\left|f'(t)\sin(\lambda\, t)\right| \leqslant M.$$
Donc par l'inégalité triangulaire puis la croissance de l'intégrale, justifiées car les bornes sont dans le bon sens, on a, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\left|\int_0^1 f'(t)\sin(\lambda\, t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 \left|f'(t)\sin(\lambda\, t)\right|\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 M\,\mathrm{d}t = M.$$
Ainsi,
$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \qquad 0 \leqslant \frac{1}{\lambda}\left|\int_0^1 f'(t)\sin(\lambda\, t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{M}{\lambda}.$$
Donc par la question 7. et l'inégalité triangulaire, on en déduit que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(t)f_\lambda(t)\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\frac{f(1)\sin(\lambda)}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\int_0^1 f'(t)\sin(\lambda\, t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \left|\frac{f(1)\sin(\lambda)}{\lambda}\right| + \frac{1}{\lambda}\left|\int_0^1 f'(t)\sin(\lambda\, t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \frac{|f(1)|}{\lambda} + \frac{M}{\lambda}.\end{aligned}$$
Ainsi,
$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \qquad 0 \leqslant \left|\int_0^1 f(t)f_\lambda(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|f(1)|+M}{\lambda}.$$
Or $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{|f(1)|+M}{\lambda} = 0$. Conclusion, par le théorème d'encadrement,
$$\boxed{\lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^1 f(t)f_k\lambda(t)\,\mathrm{d}t = 0.}$$

Partie 4 : Série du sinus cardinal alternée

10. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0;1]$. On a les égalités entre réels suivantes :
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n (-1)^k \cos\left(\frac{t}{2}\right)\cos(kt) &= \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{\cos\left(\frac{t}{2}+kt\right)+\cos\left(kt-\frac{t}{2}\right)}{2} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n (-1)^k\left(\cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right)+\cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right)\right).\end{aligned}$$
Posons pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = (-1)^k\cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right)$. Alors, $a_{k+1} = (-1)^{k+1}\cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right)$. Ainsi, on reconnaît une somme télescopique :
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n (-1)^k \cos\left(\frac{t}{2}\right)\cos(kt) &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n (-a_{k+1}+a_k) \\ &= \frac{1}{2}(a_1 - a_{n+1}) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\cos\left(\frac{t}{2}\right) - (-1)^{n+1}\cos\left(\frac{2n+2-1}{2}t\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left((-1)^n\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)\end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0;1], \qquad \sum_{k=1}^n (-1)^k \cos\left(\frac{t}{2}\right)\cos(kt) = \frac{1}{2}\left((-1)^n\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right).}$$

11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [0;1]$, $\frac{t}{2} \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \subseteq \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$. Donc $\cos\left(\frac{t}{2}\right) \neq 0$. Donc en divisant l'égalité précédente par $\cos\left(\frac{t}{2}\right)$, on obtient que

$$\forall t \in [0;1], \qquad \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cos(kt) = \frac{(-1)^n}{2} \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}.$$

En intégrant,

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cos(kt)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{(-1)^n}{2} \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \\
\Leftrightarrow\quad & \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \int_0^1 \cos(kt)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{(-1)^n}{2} \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \\
& \hspace{8cm} \text{par linéarité de l'intégrale} \\
\Leftrightarrow\quad & \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \left[\frac{\sin(kt)}{k}\right]_{t=0}^{t=1} = \int_0^1 \frac{(-1)^n}{2} \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2} \qquad \text{car } k \neq 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \left(\frac{\sin(k)}{k} - 0\right) = \int_0^1 \frac{(-1)^n}{2} \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow\quad & \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\sin(k)}{k} = (-1)^n \int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} (-1)^k u_k = (-1)^n \int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}.}$$

12. Posons pour tout $t \in [0;1]$, $f(t) = \frac{1}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}$. Pour tout $t \in [0;1]$, on a $\frac{t}{2} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$. Donc f est $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$ et on observe que

$$\int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t) f_{\frac{2n+1}{2}}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or $\frac{2n+1}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc par la question 9.,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t = 0.$$

Donc par la question précédente,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k u_k = \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2} = 0 - \frac{1}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n u_n \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n = -\frac{1}{2}.}$$