Corrigé du Devoir Maison 6
Systèmes linéaires, Applications, Equivalents

Exercice I - Equivalents

Pour chaque question, déterminer un équivalent le plus simple possible.

1. (a) On sait que $\tan(x) \underset{x\to0}{\sim} x$ et que $\ln(1+x) \underset{x\to0}{\sim} x$. De plus, posons $u = x^2$. Alors, $u \underset{x\longrightarrow0}{\to} 0$. Or

$$\sqrt{1+u} - 1 \underset{u\to0}{\sim} \frac{u}{2}.$$

Donc

$$\sqrt{1+x^2} - 1 \underset{x\to0}{\sim} \frac{x^2}{2}.$$

Finalement, par produit et quotient,

$$f(x) = \frac{\tan(x)\ln(1+x)}{\sqrt{1+x^2}-1} \underset{x\to0}{\sim} \frac{x^2}{\frac{x^2}{2}} = 2.$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to0}{\sim} 2.}$$

(b) On sait que $\cos(x) - 1 \underset{x\to0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ et on écrit donc

$$g(x) = \ln(\cos(x)) = \ln(1+\cos(x)-1).$$

Posons $u = \cos(x) - 1$. On a $u \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$. Or $\ln(1+u) \underset{u\to0}{\sim} u$. Ainsi,

$$g(x) = \ln(1+u) \underset{x\to0}{\sim} u \underset{x\to0}{\sim} -\frac{x^2}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{g(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} -\frac{x^2}{2}.}$$

(c) Par croissance comparée, $n^7 \underset{n\to+\infty}{\ll} 7^n$. En factorisant par le terme prépondérant, on obtient donc

$$u_n = \ln\left(n^7 + 7^n\right) = \ln\left(7^n\left(1+\frac{n^7}{7^n}\right)\right) = n\ln(7) + \ln\left(1+\frac{n^7}{7^n}\right).$$

Puisque $n^7 \underset{n\to+\infty}{\ll} 7^n$, on a $\frac{n^7}{7^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{n^7}{7^n}\right) = 0.$$

En particulier, $\ln\left(1+\frac{n^7}{7^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\ll} n\ln(7)$. Conclusion,

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(7).}$$

(d) Rappelons que la différence d'équivalents est INTERDIT. En factorisant dans chaque racine, le terme prépondérant, on obtient,

$$v_n = \frac{\sqrt{n^4+4}-\sqrt{n^4+1}}{n-\sqrt{n^2+1}} = \frac{n^2\sqrt{1+\frac{4}{n^4}}-n^2\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}}{n-n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

Or $\sqrt{1+u} \underset{u\to 0}{=} \frac{u}{2}+o(u)$. Ainsi, en prenant $u=\frac{4}{n^4}$ puis $u=\frac{1}{n^4}$ et enfin $u=\frac{1}{n^2}$, on obtient,

$$\begin{aligned} v_n &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{n^2\left(1+\frac{4}{2n^4}+o\left(\frac{4}{n^4}\right)\right)-n^2\left(1+\frac{1}{2n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)}{n-n\left(1+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{n^2+\frac{2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)-n^2-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{n-n-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{\frac{3}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} \end{aligned}$$

Puisque $\frac{3}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{2n^2}$ et que $-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$, par quotient, on en déduit que

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{3}{2n^2}}{-\frac{1}{2n}} = -\frac{3}{n}.$$

Conclusion,

$$\boxed{v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{3}{n}.}$$

Exercice II - Matrices et Systèmes linéaires

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par $u_0=2$, $u_1=1$, $u_2=-1$ et

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad u_{n+3}=2u_{n+2}+u_{n+1}-2u_n.$$

L'objectif est donner une formule explicite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie 1 : Formulation matricielle

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $X_n=\begin{bmatrix}u_n\\u_{n+1}\\u_{n+2}\end{bmatrix}\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

1. On observe que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$X_{n+1}=\begin{bmatrix}u_{n+1}\\u_{n+2}\\u_{n+3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\times u_n+1\times u_{n+1}+0\times u_{n+2}\\0\times u_n+0\times u_{n+1}+1\times u_{n+1}\\-2u_n+u_{n+1}+2u_{n+2}\end{bmatrix}.$$

Posons $\boxed{A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-2&1&2\end{pmatrix}}$. Alors, on observe que bien que

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad X_{n+1}=AX_n.$$

2. Posons pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « $X_n=A^nX_0$ ».
Initialisation. Si $n=0$, alors $A^0X_0=I_3X_0=X_0$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Alors, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} X_{n+1} = AX_n &= A\left(A^n X_0\right) && \text{par l'hypothèse de récurrence} \\ &= A^{n+1} X_0. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad X_n = A^n X_0.}$$

Partie 2 : Diagonalisation

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose

$$(\mathcal{S}_\lambda)\ :\ \begin{cases} \qquad y \qquad = \lambda\, x \\ \qquad\qquad z = \lambda\, y \\ -2x \quad +y \quad 2z = \lambda\, z. \end{cases}$$

3. Un petit pivot de Gauss serait naturellement très légitime. Vu la disposition du système, procédons exceptionnellement ici par substitution. On a les équivalences suivantes :

$$(\mathcal{S}_\lambda) \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} y = \lambda\, x \\ z = \lambda\, y = \lambda^2\, x \\ -2x + \lambda\, x + 2\,\lambda^2\, x = \lambda^3\, x \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} y = \lambda\, x \\ z = \lambda\, y = \lambda^2\, x \\ \left(\lambda^3 - 2\,\lambda^2 - \lambda + 2\right) x = 0. \end{cases}$$

On observe que 1 est une racine évidente de $\lambda^3 - 2\,\lambda^2 - \lambda + 2$. Donc

$$\lambda^3 - 2\,\lambda^2 - \lambda + 2 = (\lambda - 1)\left(\lambda^2 - \lambda - 2\right).$$

-1 est une autre racine et donc

$$\lambda^3 + 2\,\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2).$$

Premier cas, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1; 2\}$. Alors, $\lambda^3 - 2\,\lambda^2 - \lambda + 2 \neq 0$. Par conséquent,

$$(\mathcal{S}_\lambda) \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} y = \lambda\, x \\ z = \lambda^2\, x \\ x = 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad x = y = z = 0.$$

Dans ce cas,

$$\boxed{\forall\, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1; 2\}\,, \qquad \mathscr{S}_\lambda = \{(0,0,0)\}\,.}$$

Deuxième cas, $\lambda = -1$, alors

$$(\mathcal{S}_{-1}) \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} y = -x \\ z = x \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Dans ce cas,

$$\boxed{\mathscr{S}_{-1} = \left\{ (x, -x, x) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left((1, -1, 1)\right).}$$

Troisième cas, $\lambda = 1$, alors

$$(\mathcal{S}_1) \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} y = x \\ z = x \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Dans ce cas,

$$\boxed{\mathscr{S}_1 = \left\{ (x,x,x) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}\left((1,1,1)\right).}$$

Quatrième et dernier cas, $\lambda = 2$. Alors,

$$(\mathcal{S}_2) \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} y = 2x \\ z = 4x \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Dans ce cas,

$$\boxed{\mathscr{S}_2 = \left\{ (x,2x,4x) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}\left((1,2,4)\right).}$$

4. Par ce qui précède, il est clair que $(1,1,1) \in \operatorname{Vect}\left((1,1,1)\right) = \mathscr{S}_1$, $(1,-1,1) \in \operatorname{Vect}\left((1,1,1)\right) = \mathscr{S}_{-1}$ et $(1,2,4) \in \operatorname{Vect}\left((1,2,4)\right) = \mathscr{S}_2$.

On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

5. En appliquant l'algorithme de Gauss-Jordan, on a les calculs suivants :

$$\begin{array}{ccc}
P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} & & I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow \frac{1}{3} L_3 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array} & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow -\frac{1}{2} L_2 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 8 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.
\end{array}$$

Puisque $P \underset{\mathscr{L}}{\sim} I_3$, on en déduit que $\boxed{P \text{ est inversible}}$. De plus,

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

6. Calculons,

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP &= P^{-1}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-2&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&2\\1&1&4\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix}6&3&-3\\2&-3&1\\-2&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&2\\1&1&4\\1&-1&8\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix}6&0&0\\0&-6&0\\0&0&12\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On retrouve sur la diagonale les trois valeurs de λ pour lesquelles $(\mathcal{S}_\lambda)$ admet d'autres solutions que 0, ce n'est pas un hasard...

Posons $D = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. Alors, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
A^n = PD^nP^{-1} &= P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&(-1)^n&0\\0&0&2^n\end{pmatrix}\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6&3&-3\\2&-3&1\\-2&0&2\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&2\\1&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&3&-3\\2(-1)^n&3(-1)^{n+1}&(-1)^n\\-2^{n+1}&0&2^{n+1}\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix}6+2(-1)^n-2^{n+1}&3(1-(-1)^n)&-3+(-1)^n+2^{n+1}\\6-2(-1)^n-2^{n+2}&3(1+(-1)^n)&-3-(-1)^n+2^{n+2}\\6+2(-1)^n-2^{n+3}&3(1-(-1)^n)&-3+(-1)^n+2^{n+3}\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}6+2(-1)^n-2^{n+1}&3(1-(-1)^n)&-3+(-1)^n+2^{n+1}\\6-2(-1)^n-2^{n+2}&3(1+(-1)^n)&-3-(-1)^n+2^{n+2}\\6+2(-1)^n-2^{n+3}&3(1-(-1)^n)&-3+(-1)^n+2^{n+3}\end{pmatrix}.}$$

7. De la question précédente, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
A^n &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix}6&3&-3\\6&3&-3\\6&3&-3\end{pmatrix} + (-1)^n\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2&-3&1\\-2&3&-1\\2&-3&1\end{pmatrix} + 2^n\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-2&0&2\\-4&0&4\\-8&0&8\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&1&-1\\2&1&-1\\2&1&-1\end{pmatrix} + (-1)^n\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2&-3&1\\-2&3&-1\\2&-3&1\end{pmatrix} + 2^n\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&0&1\\-2&0&2\\-4&0&4\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Donc en posant $U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&1&-1\\2&1&-1\\2&1&-1\end{pmatrix}$, $V = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}2&-3&1\\-2&3&-1\\2&-3&1\end{pmatrix}$ et $W = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&0&1\\-2&0&2\\-4&0&4\end{pmatrix}$, on a bien,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = U + (-1)^n V + 2^n W.}$$

8. Par définition, $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et $u_2 = -1$. Par conséquent,

$$UX_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$
$$VX_0 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$WX_0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Ainsi,

$$\boxed{UX_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad VX_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad WX_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}.}$$

Or, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$ et $A^n = U + (-1)^n V + 2^n W$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} X_n = A^n X_0 &= (U + (-1)^n V + 2^n W) X_0 \\ &= UX_0 + (-1)^n VX_0 + 2^n WX_0 \\ &= \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1)^n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2^n \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 - 2^n \\ 3 - 2^{n+1} \\ 3 - 2^{n+2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

En d'autres termes, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 - 2^n$, $u_{n+1} = 3 - 2^{n+1}$ et $u_{n+2} = 3 - 2^{n+2}$ (les deux dernières égalités découlant de toutes façons de la première). On peut aussi vérifier notre résultat pour $n = 0$, $u_0 = 3 - 1 = 2$, $u_1 = 3 - 2 = 1$ et $u_2 = 3 - 4 = -1$. Cela est cohérent. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 3 - 2^{n+1}.}$$

Exercice III - Application

Soient A un ensemble non vide, E et F deux ensembles, $u \in \mathscr{F}(E,F)$ et

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{F}(A,E) & \to & \mathscr{F}(A,F) \\ f & \mapsto & u \circ f \end{array}.$$

1. Soit $f \in \mathscr{F}(A,E)$. Puisque f est à valeurs dans E et que u est définie sur E, on en déduit que $u \circ f$ est bien définie. Donc $\varphi(f)$ existe et est bien un élément de $\mathscr{F}(A,F)$ (car son espace de départ est A, celui de f, et son espace d'arrivée F, celui de u). Cela étant vrai pour tout $f scr F(A,E)$, on en déduit que

$$\boxed{\varphi \text{ est bien définie sur } \mathscr{F}(A,E).}$$

2. Soient $(f,g) \in \mathscr{F}(A,E) \times \mathscr{F}(A,F)$. Puisque u est bijective, u^{-1} existe et $u^{-1} \in \mathscr{F}(F,E)$. On a alors

$$g = u \circ f \qquad \Leftrightarrow \qquad u^{-1} \circ g = f.$$

Autrement dit tout élément $g \in \mathscr{F}(A,F)$ admet un unique antécédent $f = u^{-1} \circ g \in \mathscr{F}(A,E)$. Conclusion,

$$\boxed{\varphi \text{ est bijective et } \varphi^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathscr{F}(A,E) & \to & \mathscr{F}(A,F) \\ g & \mapsto & u^{-1} \circ g. \end{array}}$$

3. Supposons u injective. Montrons que φ est injective i.e.

$$\forall (f,g) \in \mathscr{F}(A,E)^2\,,\ \varphi(f) = \varphi(g) \quad \Rightarrow \quad f = g.$$

Soient $(f,g) \in \mathscr{F}(A,E)^2$. Supposons que $\varphi(f) = \varphi(g)$. Alors $u \circ f = u \circ g$ ou encore :

$$\forall t \in A, \qquad u \circ f(t) = u \circ g(t) \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall t \in A, \qquad u(f(t)) = u(g(t))\,.$$

Soit $t \in A$. Posons $x = f(t)$ et $y = g(t)$. Alors, $u(x) = u(y)$. Or par hypothèse u est injective. Donc $x = y$ i.e. $f(t) = g(t)$. Ceci étant vrai pour tout $t \in A$:

$$\forall t \in A, \quad f(t) = g(t).$$

Donc $f = g$. Conclusion,

$$\boxed{(\ u \text{ injective }) \quad \Rightarrow \quad (\ \varphi \text{ injective })\,.}$$

Pour tout $x \in E$, on note note $\tilde{x} \in \mathscr{F}(A,E)$ la fonction constante égale à x : $\forall t \in A$, $\tilde{x}(t) = x$. De même pour tout $y \in F$, on note $\tilde{y} \in \mathscr{F}(A,F)$ la fonction constante égale à y : $\forall t \in A$, $\tilde{y}(t) = y$.

4. (a) Soit $t \in A$. On a

$$\varphi(\tilde{x})(t) = u \circ \tilde{x}(t) = u(\tilde{x}(t)) = u(x).$$

Ceci étant vrai pour tout $t \in A$, on observe donc que $\varphi(\tilde{x})$ est la fonction constante égale à $u(x)$:

$$\boxed{\varphi(\tilde{x}) = \widetilde{u(x)}.}$$

(b) Supposons φ injective. Montrons que u est injective i.e. que pour tout $(x_1, x_2) \in E^2$, si $u(x_1) = u(x_2)$ alors $x_1 = x_2$. Soit donc $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $u(x_1) = u(x_2)$. Alors, par la question précédente, pour tout $t \in A$,

$$\varphi(\tilde{x_1})(t) = \widetilde{u(x_1)}(t) = u(x_1) = u(x_2) = \widetilde{u(x_2)}(t) = \varphi(\tilde{x_2})(t).$$

Autrement dit $\varphi(\tilde{x_1}) = \varphi(\tilde{x_2})$. Or φ est injective donc $\tilde{x_1} = \tilde{x_2}$. Donc en prenant un $t \in A$ quelconque, on observe que

$$x_1 = \tilde{x_1}(t) = \tilde{x_2}(t) = x_2.$$

Donc on a bien $x_1 = x_2$. Conclusion,

$$\boxed{(\ \varphi \text{ injective }) \quad \Rightarrow \quad (\ u \text{ injective })\,.}$$

5. On suppose u surjective.

(a) Soit $g \in \mathscr{F}(A,F)$. Soit $t \in A$. Alors $g(t) \in F$. Or u est surjective dans F. Donc il existe $x_t \in A$ tel que $g(t) = u(x_t)$. Conclusion,

$$\boxed{\forall t \in A,\ \exists x_t \in E,\ g(t) = u(x_t)\,.}$$

(b) On définit alors $f : t \mapsto x_t$. Par la question précédente, on a

$$\forall t \in A,\ g(t) = u(f(t)) = u \circ f(t) = \varphi(f)(t).$$

Conclusion,

$$\boxed{g = \varphi(f)\,.}$$

(c) Soit $g \in \mathscr{F}(A, F)$. Par la question précédente, nous avons démontré l'existence de $f \in \mathscr{F}(A, E)$ telle que $g = \varphi(f)$. Autrement dit

$$\forall g \in \mathscr{F}(A, F), \ \exists f \in \mathscr{F}(A, E), \ g = \varphi(f).$$

Conclusion,

$$\boxed{\varphi \text{ est surjective.}}$$

6. On suppose φ surjective.

(a) Soit $y \in F$. Alors, $\tilde{y} \in \mathscr{F}(A, F)$. Or φ est surjective sur $\mathscr{F}(A, F)$. Donc il existe $f \in \mathscr{F}(A, E)$ telle que

$$\tilde{y} = \varphi(f) = u \circ f.$$

Ainsi,

$$\forall t \in A, \quad u \circ f(t) = \tilde{y}(t) = y.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall y \in F, \ \exists f \in \mathscr{F}(A, F), \ \forall t \in A, \quad y = u \circ f(t).}$$

(b) Fixons un $t_0 \in A$. d'après la question précédente, pour tout $y \in F$, on a $f \in \mathscr{F}(A, F)$ tel que $\forall t \in A, \quad y = u \circ f(t)$. En posant $x = f(t_0)$, on a donc en particulier,

$$y = u(x).$$

Ce qui implique bien que

$$\forall y \in F, \ \exists x \in E, \quad y = u(x).$$

Conclusion,

$$\boxed{u \text{ est surjective.}}$$

Exercice IV - Intégration et Equivalent

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln^n(x)}{x^2} \, \mathrm{d}x$$

Partie 1 : Convergence de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. Par croissance comparée, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1 \underset{x\to+\infty}{\ll} \ln^n(x) \underset{x\to+\infty}{\ll} x.$$

Conclusion, pour $\boxed{m = 1}$, on a bien

$$\boxed{\frac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\ll} \frac{\ln^n(x)}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\ll} \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}.}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto \frac{\ln^n(x)}{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc sur le **segment** $[1; \mathrm{e}]$. Par conséquent,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_n \text{ existe..}}$$

3. Si $n = 0$, on a

$$I_0 = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x} \right]_{x=1}^{x=\mathrm{e}} = -\frac{1}{\mathrm{e}} + 1 = \frac{\mathrm{e} - 1}{\mathrm{e}}.$$

Conclusion,

$$\boxed{I_0 = \frac{\mathrm{e} - 1}{\mathrm{e}}.}$$

4. Si $n=1$, on a $I_1 = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$. Posons $y=\ln(x) \Leftrightarrow x=\mathrm{e}^y$. Alors, $\mathrm{d}x = \mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y$. Par suite,

$$I_1 = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{y}{\mathrm{e}^{2y}}\,\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y = \int_0^1 y\,\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y.$$

On procède alors à une intégration par parties. On pose

$$\forall y \in [0;1], \quad \begin{cases} u(y) = -\mathrm{e}^{-y} \\ v(y) = y \end{cases}.$$

Alors les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$ et

$$\forall y \in [0;1], \quad \begin{cases} u'(y) = \mathrm{e}^{-y} \\ v'(y) = 1 \end{cases}.$$

Donc par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_1 &= \left[-y\,\mathrm{e}^{-y}\right]_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 -\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y \\ &= -\mathrm{e}^{-1} + 0 + \int_0^1 \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y \\ &= -\frac{1}{\mathrm{e}} + \left[-\mathrm{e}^{-y}\right]_{y=0}^{y=1} \\ &= -\frac{1}{\mathrm{e}} - \mathrm{e}^{-1} + 1 \\ &= \frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}} \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{I_1 = \frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}}.}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\forall x \in [1;\mathrm{e}], \qquad 0 \leqslant \ln(x) \leqslant 1.$$

Par conséquent,

$$\forall x \in [1;\mathrm{e}], \qquad 0 \leqslant \ln^{n+1}(x) \leqslant \ln^n(x)$$

et donc

$$\forall x \in [1;\mathrm{e}], \qquad 0 \leqslant \frac{1}{\ln^{n+1}(x)} x^2 \leqslant \frac{\ln^n(x)}{x^2} \qquad\qquad \text{car } x^2 \geqslant 1 > 0.$$

Donc par croissance de l'intégrale car $1 < \mathrm{e}$,

$$0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n.$$

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on conclut que

$$\boxed{\text{La suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$$

6. On a déjà vu à la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geqslant 0$. De plus la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante, on obtient également que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_n \leqslant I_0.$$

Donc par la question 3.,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_n \leqslant \frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}} = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} \leqslant 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant I_n \leqslant 1.}$$

7. D'après les deux questions précédentes, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0. Donc par le théorème de convergence monotone,

$$\boxed{\text{La suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$$

On note ℓ sa limite.

8. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$\forall x \in [1;\mathrm{e}], \quad \begin{cases} u(x) = -\frac{1}{x} \\ v(x) = \ln^{n+1}(x) \end{cases}.$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[1;\mathrm{e}]$ et

$$\forall x \in [1;\mathrm{e}], \quad \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x^2} \\ v'(x) = \frac{n+1}{x}\ln^n(x) \end{cases}.$$

Donc par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln^{n+1}(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{\ln^{n+1}(x)}{x}\right]_{x=1}^{x=\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} -\frac{1}{x}\frac{n+1}{x}\ln^n(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{\mathrm{e}} + 0 + (n+1)\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln^n(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{car } \ln^{n+1}(1) = 0 \text{ car } n+1 \geqslant 1 \\ &= -\frac{1}{\mathrm{e}} + (n+1)\,I_n. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_{n+1} = -\frac{1}{\mathrm{e}} + (n+1)\,I_n.}$$

9. Par la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_n = \frac{1}{\mathrm{e}\,(n+1)} + \frac{I_{n+1}}{n+1}.$$

Or la suite $(I_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{n+1} = \ell \times 0 = 0.$$

Par conséquent,

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\mathrm{e}\,(n+1)} + \frac{I_{n+1}}{n+1}\right) = 0 + 0 = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\ell = 0.}$$

10. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_1^{\sqrt{\mathrm{e}}} \frac{\ln^n(x)}{x^3}\,\mathrm{d}x$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Afin que les bornes coïncident bien il faut transformer $\sqrt{\mathrm{e}}$ en e. Posons donc $y = x^2$ i.e. $x = \sqrt{y}$. Alors $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{2\sqrt{y}}$. Par conséquent,

$$J_n = \int_1^{\sqrt{\mathrm{e}}} \frac{\ln^n(x)}{x^3}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln^n\left(\sqrt{y}\right)}{y^{3/2}}\frac{1}{2\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\left(\frac{1}{2}\ln(y)\right)^n}{2y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2^{n+1}}I_n.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad J_n = \frac{1}{2^{n+1}}I_n.}$$

Les parties 2 et 3 sont indépendantes entre elles mais dépendent de la partie 1.

Partie 2 : Une formule célèbre

11. On procède par récurrence. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathscr{P}(n) : \qquad « \ \frac{1}{n!} I_n = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \ » .$$

Initialisation : si $n = 0$, on a $\frac{1}{n!} I_n = I_0 = \frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}$ d'après la question 3.. De plus,

$$1 - \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} \frac{1}{0!} = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Donc

$$\frac{1}{n!} I_n = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

et $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Alors, par la question 8., on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(n+1)!} I_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)!} \left(-\frac{1}{\mathrm{e}} + (n+1) I_n \right) \\
&= -\frac{1}{\mathrm{e}} \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{n!} I_n \\
&= -\frac{1}{\mathrm{e}} \frac{1}{(n+1)!} + 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}.
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{1}{n!} I_n = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.}$$

12. Par la question précédente, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \mathrm{e} \left(1 - \frac{I_n}{n!} \right).$$

Or $I_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc $\frac{I_n}{n!} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Conclusion,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}\,.}$$

Notez que cette formule est cohérente avec le DL de l'exponentielle en 0 en prenant $x = 1$.

Partie 3 : Etude asymptotique de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$

13. D'après la question 8. on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_{n+1} = -\frac{1}{\mathrm{e}} + (n+1)\, I_n,$$

ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_n = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{\mathrm{e}} + I_{n+1}\right).$$

Puisque $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a

$$\frac{1}{\mathrm{e}} + I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

De plus,

$$n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Donc par quotient,

$$\boxed{I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n\,\mathrm{e}}.}$$

14. Par la question précédente, on en déduit que

$$I_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(n+1)\,\mathrm{e}}.$$

Or $\frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ donc par transitivité,

$$I_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n\,\mathrm{e}},$$

ou encore

$$I_{n+1} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n\,\mathrm{e}} + o\left(\frac{1}{n\,\mathrm{e}}\right) = \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n\,\mathrm{e}} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

En utilisant à nouveau la question 8.

$$\begin{aligned}
I_n &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{\mathrm{e}} + I_{n+1}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}\left(\frac{1}{\mathrm{e}} + \frac{1}{n\,\mathrm{e}} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(\frac{1}{\mathrm{e}} + \frac{1}{n\,\mathrm{e}} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\mathrm{e}} + \frac{1}{n\,\mathrm{e}} + o\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{\mathrm{e}\,n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\mathrm{e}} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n\,\mathrm{e}} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{I_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n\,\mathrm{e}} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).}$$

C'est une technique classique dans le cas d'une suite ayant une relation de récurrence. On pourrait recommencer le processus pour obtenir un DL de I_n à l'ordre $\frac{1}{n^3}$ puis $\frac{1}{n^4}$ etc.