Devoir Maison 8
Suites et Polynômes

A faire pour le Jeudi 11 Février

Exercice I - Suite implicite

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto x\sqrt{1+\frac{x}{n}}$.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $x_n \in]0;1[$ tel que $f_n(x_n) = 1$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $x \in]0;1[$, $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
3. Déterminer la monotonie de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
4. En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer ℓ sa limite.
5. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \ell - x_n$. Déterminer un équivalent de u_n puis en déduire que $x_n \underset{n\to+\infty}{=} \ell + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ où α est un réel que l'on précisera.
6. Procéder de même pour montrer qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $x_n \underset{n\to+\infty}{=} \ell + \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice II - Suite Récurrente

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \operatorname{argsh}(u_n).$$

1. Montrer proprement que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. (a) Déterminer au voisinage de 0 la position de la courbe de sh par rapport à sa tangente en 0.
   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\operatorname{sh}(x) > x$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note ℓ sa limite.
4. Déterminer ℓ.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_{n-1}^2}$.

5. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
6. A l'aide du lemme de Cesàro, en déduire un équivalent de u_n quand $n \to +\infty$.

Exercice III - Polynômes et suites numériques

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant

$$(E) \qquad P\left(X^2-1\right) = P(X-1)\,P(X+1)\,.$$

Partie 1 : Construction d'une suite de racines

1. Déterminer les polynômes constants solutions de (E).
2. Déterminer les polynômes de degré 1 solutions de (E).
3. On suppose pour toute la suite P non constant. On note $d = \deg(P)$. Quel théorème assure alors l'existence d'une racine de P dans $\mathbb{C}$?

Soit $a \in \mathbb{C}$ une racine de P. On pose $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n.$$

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est une racine de P.

Partie 2 : Cas réel

On suppose dans cette partie que $a \in \mathbb{R}$ et on définit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+2x \end{array}$.

5. Préciser le tableau de variation de f puis justifier que $u_1 \in [-1;+\infty[$.
6. On suppose $u_1 \in \mathbb{R}_+^*$.
   (a) Montrer alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.
   (b) En déduire une contradiction à propos de P.
7. On suppose que $u_1 \in]-1;0[$.
   (a) Déterminer le tableau de variation sur $\mathbb{R}$ de $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)-x \end{array}$.
   (b) En déduire la stricte monotonie, la convergence puis la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (c) Retrouver la contradiction sur P.
8. Montrer que -1 n'est pas une racine de P. Que vaut u_1 ?
9. En déduire que l'unique racine de P est 0.
10. On admet que P n'admet pas de racine dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *(cf partie suivante pour les volontaires)*. Conclure sur l'ensemble des solutions de (E).

Partie 3 : Cas général - Facultatif

Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

11. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n + 1 = (a+1)^{2^n}$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n = |u_n + 1|$.

12. Montrer que $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite d'une suite géométrique dont on précisera la raison.
13. Discuter suivant les valeurs de $|a+1|$ la monotonie de $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
14. En déduire que $|a+1| = 1$.
15. On démontre de même que $|a-1| = 1$, ce que l'on admet. A l'aide d'un schéma, en déduire une contradiction.