Correction du Devoir Surveillé 2
Complexes et fonctions réelles

Problème I - Fonction réelle

On considère la fonction suivante

$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{D}_f & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \end{array}$$

où $\mathscr{D}_f$ désigne l'ensemble de définition de f. On rappelle le résultat suivant :

$$\lim_{u\to+\infty} u\,\mathrm{e}^{-u} = 0.$$

1. La fonction exponentielle, la fonction $x \mapsto -\frac{x}{2}$ étant définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit directement que

$$\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R}_+.}$$

De plus la fonction racine carrée n'est dérivable que sur $\mathbb{R}_+^*$ tandis que la fonction $x \mapsto -\frac{x}{2}$ et la fonction exponentielle restent dérivable sur $\mathbb{R}$. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{D}'_f = \mathbb{R}_+^*.}$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} - 0}{x} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}.$$

Or $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$. Par conséquent,

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} = +\infty.}$$

On en déduit que $\boxed{\text{le graphe de } f \text{ admet une tangente verticale d'équation } x=0}$.

3. Par la question 1., la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + \sqrt{x}\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{2x}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} - \frac{\sqrt{x}}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\right)\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \\ &= \frac{1-x}{2x} f(x). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f'(x) = \frac{f(x)\,(1-x)}{2x}.}$$

4. A l'aide du changement de variable $u = \sqrt{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on a

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = \lim_{u\to+\infty} u\,\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} = \lim_{u\to+\infty} u\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{e}^{u-\frac{u^2}{2}}$$

On sait d'après le rappel que $\lim\limits_{u\to+\infty} u\,\mathrm{e}^{-u}$. De plus, $\lim\limits_{u\to+\infty} u - \dfrac{u^2}{2} = -\infty$. Donc par composition, $\lim\limits_{u\to+\infty} \mathrm{e}^{u-\frac{u^2}{2}} = 0$. Conclusion,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

5. (a) En posant $v = \frac{x}{2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = \lim_{v\to+\infty} 2v\,\mathrm{e}^{-v} = 2 \lim_{v\to+\infty} v\,\mathrm{e}^{-v}$$

Donc, d'après le rappel, on en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).}$$

(b) On a

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{x}{f(x)} = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{x}{\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}} = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} = 0 \times 1 = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{x \underset{\substack{x\to0\\x>0}}{=} o\left(f(x)\right).}$$

6. D'après la question 3., on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = \frac{f(x)\,(1-x)}{2x} = \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,(1-x)}{2x}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a alors,

$$f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 1.$$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $[0;1]$ et de même strictement décroissante sur $[1;+\infty[$. De plus, $f(0) = 0$, $f(1) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ et par la question 4., $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Par conséquent, on en déduit le tableau de variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$	$\searrow$	0

7. On a vu que f est strictement croissante sur $[0;1]$. De plus la fonction f est continue sur $[0;1]$. Donc d'après le théorème de la bijection,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ réalise une bijection de } [0;1] \text{ dans } J=[f(0);f(1)]=\left[0;\frac{1}{\sqrt{e}}\right].}$$

On note dans toute la suite φ la réciproque associée.

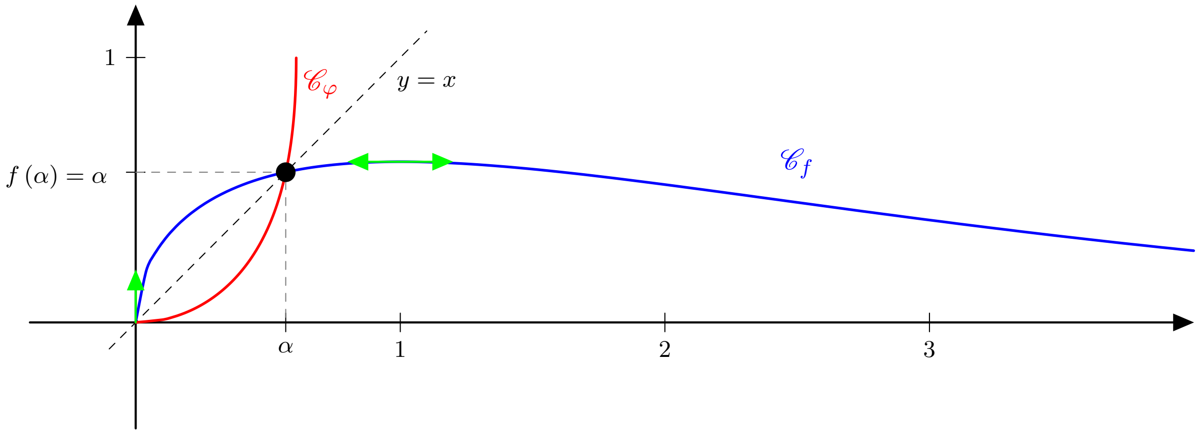
8. On sait également, toujours par le théorème de la bijection que φ est aussi strictement monotone de même monotonie que f, donc φ est strictement croissante sur J et va de J dans $[0;1]$. Ainsi,

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$
φ	0	$\nearrow$	1

9. On a vu que f est dérivable sur $]0;1[$ et pour tout $x \in]0;1[$,
$$f'(x)=\frac{f(x)\,(1-x)}{2x}>0.$$
En particulier, $\forall x \in]0;1[$, $f'(x) \neq 0$. Donc d'après le théorème de la dérivée de la fonction réciproque, on en déduit que $\boxed{\varphi \text{ est dérivable sur } \left]0;\frac{1}{\sqrt{e}}\right[}$ et on a
$$\forall x \in \left]0;\frac{1}{\sqrt{e}}\right[, \qquad \varphi'(x)=\frac{1}{f'\left(\varphi(x)\right)}=\frac{2\,\varphi(x)}{f\left(\varphi(x)\right)\left(1-\varphi(x)\right)}.$$
Mais par construction de φ, on a pour tout $x \in \left]0;\frac{1}{\sqrt{e}}\right[$, $f\left(\varphi(x)\right)=x$. Ainsi,
$$\boxed{\forall x \in \left]0;\frac{1}{\sqrt{e}}\right[, \qquad \varphi'(x)=\frac{2\,\varphi(x)}{x\left(1-\varphi(x)\right)}.}$$

10. (a) Soit $x \in]0;1]$. On a :
$$\begin{aligned} f(x)=x \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}=x \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}=\sqrt{x} && \textit{car } x>0 \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{-x}=x && \text{car } x \geqslant 0 \text{ et } \mathrm{e}^{-x} \geqslant 0. \end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{f(x)=x \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{-x}=x.}$$
(b) Posons pour tout $x \in [0;1]$, $h(x)=x-\mathrm{e}^{-x}$. La fonction h est dérivable sur $[0;1]$ et
$$\forall x \in [0;1], \quad h'(x)=1+\mathrm{e}^{-x}>0.$$
Donc la fonction h est strictement croissante sur $[0;1]$. De plus h est continue sur $[0;1]$. Enfin, on a $h(0)=0-1<0$ et $h(1)=1-\mathrm{e}^{-1}>0$. Donc par le théorème de la bijection (ou le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires),
$$\exists! \alpha \in [0;1], \quad h(\alpha)=0.$$
Et puisque $h(0)<0$, on a nécessairement $\alpha \in]0;1]$. Ainsi,
$$\exists! \alpha \in]0;1] \text{ vérifiant } \alpha-\mathrm{e}^{-\alpha}=0 \text{ i.e. } \alpha=\mathrm{e}^{\alpha}.$$
A l'aide de la question précédente, on conclut que
$$\boxed{\exists! \alpha \in]0;1] \text{ tel que } f(\alpha)=\alpha.}$$

11. Grâce aux questions précédentes, on en déduit le graphe suivant :



12. On définit,
$$\forall x \in [1;+\infty[\,, \qquad g(x)=\varphi\left(f(x)\right).$$

(a) Soit $x \in [1;+\infty[$. Alors d'après le tableau de variation de f, on a
$$f(x) \in \left]0;\frac{1}{\sqrt{e}}\right].$$
Or nous avons vu que φ est définie sur l'ensemble $J=\left[0;\frac{1}{\sqrt{e}}\right]$. Donc $\varphi\left(f(x)\right)$ existe. Ceci étant vrai pour tout $x\in[1;+\infty[$, on en déduit que
$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ est bien définie sur } [1;+\infty[.}$$

(b) On sait d'après la question 6. que f est strictement décroissante sur $[1;+\infty[$ et à valeurs dans $J=\left[0;\frac{1}{\sqrt{e}}\right]$. De plus, par la question 8., la fonction φ est strictement croissante sur J. Or la composée d'une fonction strictement décroissante avec une fonction strictement croissante est une fonction strictement décroissante. Par conséquent,
$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ est strictement décroissante sur } J.}$$

(c) On sait par ce qui précède que f est dérivable sur $]1;+\infty[$, que $f\left(]1;+\infty[\right)=\left]0;\frac{1}{\sqrt{e}}\right[$ et que φ est dérivable sur $\left]0;\frac{1}{\sqrt{e}}\right[$. Donc par composée de fonctions dérivables, on en déduit que g est dérivable sur $]1;+\infty[$, de plus,
$$\begin{aligned}\forall x\in\,]1;+\infty[\,,\qquad g'(x)&=f'(x)\,\varphi'\left(f(x)\right)\\&=\frac{f(x)\,(1-x)}{2x}\,\frac{2\,\varphi\left(f(x)\right)}{f(x)\left(1-\varphi\left(f(x)\right)\right)} && \textit{par les questions 1. et 9.}\\&=\frac{(1-x)\,g(x)}{x\,(1-g(x))}.\end{aligned}$$
Conclusion, $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est dérivable sur }]1;+\infty[}$ et
$$\boxed{\forall x\in\,]1;+\infty[\,,\qquad g'(x)=\frac{(1-x)\,g(x)}{x\,(1-g(x))}.}$$

(d) On a pour tout $x \in]1;+\infty[$, $f(x) \in \left]0;\frac{1}{\sqrt{e}}\right[$. De plus, d'après le tableau de variation de φ, on a également, pour tout $y \in \left]0;\frac{1}{\sqrt{e}}\right[$, $\varphi(y) \in]0;1[$. Donc pour tout $x \in]1;+\infty[$, on a $g(x) \in]0;1[$. On en déduit alors que

$$\forall x \in]1;+\infty[\,, \qquad g(x) > 0 \qquad \text{et} \qquad 1-g(x) > 0.$$

Mais nous avons également $1-x<0$ et $x>0$. Par conséquent,

$$\forall x \in]1;+\infty[\,, \qquad g'(x) < 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ est strictement décroissante sur } [1;+\infty[.}$$

Problème II - Fonction complexe

On considère la fonction complexe

$$f: \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{z-1}{z+3i}, \end{array}$$

où $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$ est l'ensemble de définition de f sur $\mathbb{C}$.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a directement $z \in \mathcal{D} \Leftrightarrow z+3i \neq 0 \Leftrightarrow z \neq -3i$. Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus \{-3i\}\,.}$$

2. (a) On note que $-3-2i \in \mathcal{D}$. On a alors les égalités entre complexes suivantes :

$$\begin{aligned} f(-3-2i) = \frac{-3-2i-1}{-3-2i+3i} &= \frac{-4-2i}{-3+i} \\ &= \frac{(-4-2i)(-3-i)}{9+1} \\ &= \frac{12+4i+6i-2}{10} \\ &= \frac{10+10i}{10} = 1+i. \end{aligned}$$

De plus,

$$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\,.$$

Conclusion,

$$\boxed{f(-3-2i) = 1+i = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\,.}$$

(b) Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^2$. On a

$$\begin{aligned} \sqrt{16+8\sqrt{3}} = a+b\sqrt{3} \quad &\Leftrightarrow \quad 16+8\sqrt{3} = \left(a+b\sqrt{3}\right)^2 \qquad \text{car } a+b\sqrt{3} \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 16+8\sqrt{3} = a^2+2ab\sqrt{3}+3b^2 \\ &\Leftarrow \quad \begin{cases} 16 = a^2+3b^2 \\ 2ab = 8 \end{cases} \\ &\Leftarrow \quad \begin{cases} 16 = a^2+3b^2 \\ ab = 4. \end{cases} \end{aligned}$$

On note alors que SI $a=b=2$, on a

$$a^2+3b^2 = 4+3\times 4 = 16 \qquad \text{et} \qquad ab = 4$$

et donc $\sqrt{16+8\sqrt{3}} = a+b\sqrt{3}$. Conclusion, en prenant $a=b=2$, on a

$$\sqrt{16+8\sqrt{3}} = 2+2\sqrt{3}.$$

(c) On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}\left|\sqrt{3}+1+i\left(\sqrt{3}+3\right)\right| &= \sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2+\left(\sqrt{3}+3\right)^2}\\ &= \sqrt{3+2\sqrt{3}+1+3+6\sqrt{3}+9}\\ &= \sqrt{16+8\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Donc par la question précédente,

$$\left|\sqrt{3}+1+i\left(\sqrt{3}+3\right)\right| = 2\left(1+\sqrt{3}\right).$$

Par suite, on a

$$\begin{aligned}\sqrt{3}+1+i\left(\sqrt{3}+3\right) &= 2\left(1+\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}+3}{2\left(1+\sqrt{3}\right)}\right)\\ &= 2\left(1+\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2}+i\frac{\left(\sqrt{3}+3\right)\left(1-\sqrt{3}\right)}{2\left(1-3\right)}\right)\\ &= 2\left(1+\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}+3-3-3\sqrt{3}}{-4}\right)\\ &= 2\left(1+\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2}+i\frac{-2\sqrt{3}}{-4}\right)\\ &= 2\left(1+\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ &= 2\left(1+\sqrt{3}\right)\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}.\end{aligned}$$

Conclusion, la forme polaire de $\sqrt{3}+1+i\left(\sqrt{3}+3\right)$ est donnée par,

$$\boxed{\sqrt{3}+1+i\left(\sqrt{3}+3\right) = 2\left(1+\sqrt{3}\right)\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}.}$$

(d) On note que $\sqrt{3}+1+i\sqrt{3}\in\mathcal{D}$. On a alors,

$$f\left(\sqrt{3}+1+i\sqrt{3}\right) = \frac{\sqrt{3}+1+i\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1+i\sqrt{3}+3i} = \frac{\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1+i\left(\sqrt{3}+3\right)} = \sqrt{3}\frac{1+i}{\sqrt{3}+1+i\left(\sqrt{3}+3\right)}.$$

Or $1+i=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$ et par la question précédente, $\sqrt{3}+1+i\left(\sqrt{3}+3\right) = 2\left(1+\sqrt{3}\right)\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}f\left(\sqrt{3}+1+i\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}}{2\left(1+\sqrt{3}\right)\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}} &= \frac{\sqrt{6}\left(1-\sqrt{3}\right)}{2\left(1-3\right)}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{12}}\\ &= \frac{\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{-4}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{12}}\\ &= \frac{\sqrt{2}\left(3-\sqrt{3}\right)}{4}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{12}}.\end{aligned}$$

On observe que l'on a bien obtenu la forme polaire car $\frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{3})}{4}>0$. Conclusion, la forme polaire de $f\left(\sqrt{3}+1+i\sqrt{3}\right)$ est donnée par

$$\boxed{f\left(\sqrt{3}+1+i\sqrt{3}\right) = \frac{\sqrt{2}\left(3-\sqrt{3}\right)}{4}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{12}}.}$$

3. Soit $z \in \mathcal{D}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{lll} z \in f^{-1}(\mathbb{R}) & \Leftrightarrow & f(z) \in \mathbb{R} \\ & \Leftrightarrow & f(z) = \overline{f(z)} \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{z-1}{z+3i} = \dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}-3i} \\ & \Leftrightarrow & (z-1)(\overline{z}-3i) = (\overline{z}-1)(z+3i) \qquad \textit{car } z \neq -3i \textit{ et donc } \overline{z} \neq 3i \\ & \Leftrightarrow & |z|^2 - 3iz - \overline{z} + 3i = |z|^2 + 3i\overline{z} - z - 3i \\ & \Leftrightarrow & 6i = 3i(z+\overline{z}) - (z-\overline{z}) \\ & \Leftrightarrow & 6i = 6i\mathrm{Re}(z) - 2i\mathrm{Im}(z) \\ & \Leftrightarrow & 3 = 3\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z) \\ & \Leftrightarrow & \mathrm{Im}(z) = 3\mathrm{Re}(z) - 3. \end{array}$$

Posons $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a alors

$$z \in f^{-1}(\mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad y = 3x - 3.$$

On remarque que si $x = 0$ et $y = -3$ alors on a bien $y = 3x - 3$ et donc $-3i$ est bien un point de la droite d'équation $y = 3x - 3$. Conclusion, l'ensemble solution est la droite d'équation $y = 3x - 3$ privée du point $(0, -3)$:

$$\boxed{f^{-1}(\mathbb{R}) = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) = 3\mathrm{Re}(z) - 3 \text{ et } z \neq -3i \}.}$$

4. Soit $z \in \mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus \{-3i\}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{lll} z \in f^{-1}(\mathbb{U}) & \Leftrightarrow & f(z) \in \mathbb{U} \\ & \Leftrightarrow & f(z)\overline{f(z)} = 1 \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{z-1}{z+3i}\dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}-3i} = 1 \\ & \Leftrightarrow & |z|^2 - z - \overline{z} + 1 = |z|^2 - 3iz + 3i\overline{z} + 9 \qquad \textit{car } z \neq -3i \textit{ et } \overline{z} \neq 3i \\ & \Leftrightarrow & -2\mathrm{Re}(z) = -3i(z-\overline{z}) + 8 \\ & \Leftrightarrow & -2\mathrm{Re}(z) = 6\mathrm{Im}(z) + 8 \\ & \Leftrightarrow & \mathrm{Im}(z) = -\dfrac{1}{3}\mathrm{Re}(z) - \dfrac{4}{3}. \end{array}$$

Posons $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on obtient alors la droite d'équation $y = -\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$. On note également que le couple $(0, -3)$ n'est pas sur cette droite. Conclusion,

$$\boxed{f^{-1}(\mathbb{U}) = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \mathrm{Im}(z) = -\frac{1}{3}\mathrm{Re}(z) - \frac{4}{3} \right\}.}$$

5. Soient $A(-3i)$ et $B(1)$ deux points du plan complexe.

   (a) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-3i\}$ et M le point du plan complexe d'affixe M. Posons $z_A = -3i$ et $z_B = 1$. On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
z \in f^{-1}(\mathbb{R}) \quad &\Leftrightarrow \quad f(z) \in \mathbb{R} \quad &&\Leftrightarrow \quad \frac{z-1}{z+3i} \in \mathbb{R} \\
& &&\Leftrightarrow \quad \arg\left(\frac{z-1}{z+3i}\right) \equiv 0\ [\pi] \\
& &&\Leftrightarrow \quad \arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right) \equiv 0\ [\pi] \\
& &&\Leftrightarrow \quad \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) \equiv 0\ [\pi] \\
& &&\Leftrightarrow \quad \text{les points } A,\ B \text{ et } M \text{ sont alignés} \\
& &&\Leftrightarrow \quad M \in (AB)\,.
\end{aligned}$$

On n'oublie pas d'exclure $A(-3i)$ et on en conclut que

$$\boxed{\left\{ M(z) \mid z \in f^{-1}(\mathbb{R}) \right\} = (AB) \setminus \{A\}\,.}$$

(b) Avec les mêmes notations qu'à la question précédentes, on a pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-3i\}$,

$$\begin{aligned}
z \in f^{-1}(\mathbb{U}) \quad &\Leftrightarrow \quad |f(z)| = 1 \quad &&\Leftrightarrow \quad \left|\frac{z-1}{z+3i}\right| = 1 \\
& &&\Leftrightarrow \quad |z-1| = |z+3i| \qquad \textit{car } z \neq -3i \\
& &&\Leftrightarrow \quad |z-z_B| = |z-z_A| \\
& &&\Leftrightarrow \quad BM = AM.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des points M dont l'affixe appartient à $f^{-1}(\mathbb{U})$ est la médiatrice du segment $[AB]$.

6. (a) Soit $\omega \in \mathbb{C}$. Soit $z \in \mathcal{D}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
f(z) = \omega \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z-1}{z+3i} = \omega \quad &\Leftrightarrow \quad z - 1 = \omega\,(z+3i) \qquad \textit{car } z \neq -3i \\
&\Leftrightarrow \quad z\,(1-\omega) = 1 + 3i\,\omega\,.
\end{aligned}$$

Premier cas, si $\omega = 1$. Alors

$$f(z) = \omega \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 1 + 3i \qquad \textit{impossible.}$$

Second cas, si $\omega \neq 1$. Alors

$$f(z) = \omega \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{1+3i\,\omega}{1-\omega}.$$

Conclusion, l'ensemble $\mathscr{S}_\omega$ des solutions de l'équation $f(z) = \omega$ est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_\omega = \begin{cases} \emptyset & \textit{si } \omega = 1 \\ \left\{\frac{1+3i\,\omega}{1-\omega}\right\} & \textit{si } \omega \neq 1. \end{cases}}$$

(b) Nous avons donc démontré dans la question précédente que pour tout $\omega \in \mathcal{D}' = \mathbb{C}\setminus\{1\}$, l'équation $f(z) = \omega$ admet une unique solution i.e. ω admet un unique antécédent par f. Conclusion,

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ définit une bijection de } \mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus \{-3i\} \text{ dans } \mathcal{D}' = \mathbb{C} \setminus \{1\}}$$

et

$$\boxed{\forall\, \omega \in \mathbb{C} \setminus \{1\}\,, \qquad f^{-1}(\omega) = \frac{1+3i\,\omega}{1-\omega}.}$$

7. Soit $\rho = |1+3i|$ et α un argument de $1+3i$. On pose également
$$\mathscr{C} = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z+3i| = \rho \,\}.$$

   (a) So easy ! On a
$$\boxed{\rho = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}.}$$

   (b) Puisque $|z+3i|$ est la distance de $M(z)$ à $A\,(-3i)$, on en déduit que (comme son nom l'indique)
$$\boxed{\mathscr{C} \text{ est l'ensemble des affixes du cercle de centre } A\,(-3i) \text{ et de rayon } \rho = \sqrt{10}.}$$

   (c) Soit $z \in \mathscr{C}$. Alors $|z+3i| = \rho$. Donc d'après la forme polaire du complexe $z+3i$ (qui existe car ce complexe est non nul puisque son module est non nul), on en déduit qu'il existe $\theta \in \left]-\pi;\pi\right]$ tel que $z+3i = \rho\,\mathrm{e}^{i\theta}$. Conclusion,
$$\boxed{\forall z \in \mathscr{C},\ \exists \theta \in \left]-\pi;\pi\right], \qquad z = \rho\,\mathrm{e}^{i\theta} - 3i.}$$

   (d) Soit $z \in \mathscr{C}$. Par la question précédente, il existe $\theta \in \left]-\pi;\pi\right]$ tel que $z = \rho\,\mathrm{e}^{i\theta} - 3i$. Puisque $\rho \neq 0$, on a $\rho\,\mathrm{e}^{i\theta} \neq 0$ et donc $z = \rho\,\mathrm{e}^{i\theta} - 3i \neq -3i$. Ainsi, $z \in \mathcal{D}$. On calcule alors
$$\begin{aligned}
|f(z)| = \left|\frac{z-1}{z+3i}\right| &= \left|\frac{\rho\,\mathrm{e}^{i\theta} - 3i - 1}{\rho\,\mathrm{e}^{i\theta} - 3i + 3i}\right| \\
&= \left|\frac{\rho\,\mathrm{e}^{i\theta} - (1+3i)}{\rho\,\mathrm{e}^{i\theta}}\right| \\
&= \frac{\left|\rho\,\mathrm{e}^{i\theta} - (1+3i)\right|}{\left|\rho\,\mathrm{e}^{i\theta}\right|} \\
&= \frac{\left|\rho\,\mathrm{e}^{i\theta} - (1+3i)\right|}{\rho}
\end{aligned}$$

   Or par définition de α, la forme polaire de $1+3i$ est donnée par $1+3i = |1+3i|\,\mathrm{e}^{i\alpha} = \rho\,\mathrm{e}^{i\alpha}$. Ainsi,
$$|f(z)| = \frac{\left|\rho\,\mathrm{e}^{i\theta} - \rho\,\mathrm{e}^{i\alpha}\right|}{\rho} = \rho\frac{\left|\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{i\alpha}\right|}{\rho} \qquad \textit{car } \rho = \sqrt{10} > 0.$$

   Donc
$$|f(z)| = \left|\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{i\alpha}\right|.$$

   Afin de finir la calcul, procédons par la factorisation par l'angle moitié :
$$\begin{aligned}
|f(z)| &= \left|\mathrm{e}^{i\frac{\theta+\alpha}{2}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{\theta-\alpha}{2}} - \mathrm{e}^{-i\frac{\theta-\alpha}{2}}\right)\right| \\
&= \left|\mathrm{e}^{i\frac{\theta+\alpha}{2}}\, 2i \sin\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)\right| \\
&= 2\left|\sin\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)\right|.
\end{aligned}$$

   Conclusion,
$$\boxed{|f(z)| = 2\left|\sin\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)\right|.}$$

Problème III - Equation à paramètre

Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on considère l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

(E_m)
$$\frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}} = m.$$

Partie 1 : Etude de fonction

On définit la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}} \end{array}$$

1. Soit Δ le discriminant de X^2+X+1. On a $\Delta = 1-4 = -3 < 0$. Par conséquent, x^2+x+1 est de signe constant celui de $a = 1$. D'où $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2+x+1 > 0$. Conclusion,

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}.}$$

2. On remarque que $f(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $f(-1) = \frac{-1}{\sqrt{1-1+1}} = -1$. Donc $f(-1) \neq -f(1)$ et $f(-1) \neq f(1)$. Conclusion,

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ n'est ni paire ni impaire.}}$$

3. (a) Pour tout $x > 0$, on a les égalités suivantes :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} \qquad \textit{car } x > 0.$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 1$. Conclusion,

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1.}$$

De la même façon, pour tout $x < 0$,

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} \qquad \textit{car } x < 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1.}$$

(b) Par la question précédente, on en déduit directement que la fonction f admet une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation

$$\boxed{y = 1.}$$

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2+x+1 > 0$ *(attention la racine carrée n'est pas dérivable sur son domaine de définition, il est donc important de spécifier ce dernier point)*. Par conséquent, $x \mapsto \sqrt{x^2+x+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+x+1} - x\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}}{x^2+x+1} = \frac{2\left(x^2+x+1\right) - \left(2x^2+x\right)}{2\left(x^2+x+1\right)^{3/2}} = \frac{x+2}{2\left(x^2+x+1\right)^{3/2}}.$$

Conclusion

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \frac{x+2}{2\left(x^2+x+1\right)^{3/2}}.}$$

5. Par la question précédente et puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(x^2+x+1\right)^{3/2} > 0$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) \geqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x+2 \geqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \geqslant -2.$$

De plus,

$$f(-2) = \frac{-2}{\sqrt{(-2)^2-2+1}} = \frac{-2}{\sqrt{3}} = \frac{-2\sqrt{3}}{3}.$$

On en déduit alors le tableau de variation suivant (les limites ayant été établies à la question 3.a) :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	-1	$\searrow$	$\frac{-2\sqrt{3}}{3}$	$\nearrow$	1

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculons,

$$\begin{aligned}
f(x) = -1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}} = -1 \\
&\Leftrightarrow \quad x = -\sqrt{x^2+x+1} \qquad\qquad \textit{car } \sqrt{x^2+x+1} > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -\sqrt{x^2+x+1} < 0 \\ x^2 = x^2+x+1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x < 0 \\ x+1 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad x = -1.
\end{aligned}$$

Cela nous permet de compléter notre tableau de variation :

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
f	-1	$\searrow$	$\frac{-2\sqrt{3}}{3}$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	1

Soit $x \in \mathbb{R}$, on observe maintenant que

$$(E_m) \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) = m.$$

Donc par lecture du tableau de variation, on a

$$\boxed{\text{L'équation } (E_m) \text{ admet } \begin{cases} \text{aucune solution} & \text{si } m \in \left]-\infty; \frac{-2\sqrt{3}}{3}\right[\cup [1; +\infty[\\ \text{une unique solution} & \text{si } m \in \left\{\frac{-2\sqrt{3}}{3}\right\} \cup [-1; 1[\\ \text{deux solutions} & \text{si } m \in \left]\frac{-2\sqrt{3}}{3}; -1\right[\end{cases}}$$

Partie 2 : Calcul dans R

On ne pourra pas utiliser les résultats de la partie 1 pour répondre aux questions suivantes. Le candidat est cependant invité à vérifier la cohérence des résultats des deux parties.

7. Supposons $m = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$(E_0) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

Conclusion, l'ensemble solution est dans ce cas,

$$\boxed{\mathscr{S}_0 = \{0\}.}$$

8. Supposons $m = 1$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
(E_1) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}} = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad x = \sqrt{x^2+x+1} \qquad \textit{car } \sqrt{x^2+x+1} \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x^2 = x^2+x+1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x+1 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x = -1 \end{cases} \qquad \textit{impossible.}
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble solution est dans ce cas,

$$\boxed{\mathscr{S}_1 = \emptyset.}$$

9. Supposons $m = -1$. Soit $x \in \mathbb{R}$. De même qu'à la question 6., on a

$$\begin{aligned}
(E_{-1}) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}} = -1 \\
&\Leftrightarrow \quad x = -\sqrt{x^2+x+1} \qquad \textit{car } \sqrt{x^2+x+1} \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \leqslant 0 \\ x^2 = x^2+x+1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad x = -1.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble solution est dans ce cas,

$$\boxed{\mathscr{S}_{-1} = \{-1\}.}$$

10. Soient $m \in \mathbb{R}$ et x une solution de (E_m). Alors,

$$x = \sqrt{x^2+x+1}m.$$

Puisque $\sqrt{x^2+x+1} > 0$, on en déduit que x et m sont de même signe. Donc

$$\boxed{xm \geqslant 0.}$$

11. (a) Soit $x \geqslant 0$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}} < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad x < \sqrt{x^2+x+1} && \textit{car } \sqrt{x^2+x+1} > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 < x^2+x+1 && \textit{car } x \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \quad -1 < x.
\end{aligned}$$

La dernière assertion étant toujours vraie pour $x \geqslant 0$, on en déduit que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}} < 1.}$$

(b) Soit $x \leqslant 0$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}} \geqslant -\frac{2}{\sqrt{3}} \\
\Leftrightarrow \quad & 0 \geqslant x\sqrt{3} \geqslant -2\sqrt{x^2+x+1} && \textit{car } \sqrt{x^2+x+1} > 0 \\
\Leftrightarrow \quad & 3x^2 \leqslant 4\left(x^2+x+1\right) && \textit{car la fonction carrée est décroissante sur } \mathbb{R}_- \\
& && \textit{et } x\sqrt{3} \leqslant 0 \textit{ et } -2\sqrt{x^2+x+1} \leqslant 0 \\
\Leftrightarrow \quad & 0 \leqslant x^2+4x+4 = (x+2)^2.
\end{aligned}$$

La dernière assertion étant toujours vraie, on en déduit que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_-, \qquad \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}} \geqslant -\frac{2}{\sqrt{3}}.}$$

(c) **Premier cas** si $m < -\frac{2}{\sqrt{3}} < 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$ une solution de (E_m). Alors d'après la question 10., on en déduit que $x \leqslant 0$. Donc d'après la question précédente,

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}} \geqslant -\frac{2}{\sqrt{3}} \geqslant -\frac{2}{\sqrt{3}} > m.$$

Or par hypothèse $\frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}} = m$, contradiction. Donc (E_m) n'admet aucune solution. Dans ce cas, on a

$$\boxed{\mathscr{S}_{\left]-\infty;-\frac{2}{\sqrt{3}}\right[} = \emptyset.}$$

Deuxième cas si $m \geqslant 1$. Soit x une solution de (E_m). Alors par la question 10., $x \geqslant 0$ et donc d'après la question 11.a, on a

$$1 \leqslant m = \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}} < 1 \qquad \textit{contradiction.}$$

Par conséquent, (E_m) n'admet aucune solution. Dans ce cas, on a

$$\boxed{\mathscr{S}_{[1;+\infty[} = \emptyset.}$$

12. Soit $m \in \left[-\frac{2}{\sqrt{3}}; 0\right[\cup]0;1[$.

(a) On pose

$$(F_m) \qquad \left(m^2-1\right)x^2 + m^2 x + m^2 = 0.$$

Soit Δ_m le discriminant associé. On a

$$\Delta_m = m^4 - 4m^2\left(m^2-1\right) = m^2\left(m^2-4m^2+4\right) = m^2\left(4-3m^2\right).$$

Puis, l'on a

$$\begin{aligned}\Delta_m \geqslant 0 \quad &\Leftrightarrow \quad m^2\left(4-3m^2\right) \geqslant 0 \quad &\Leftrightarrow \quad & 4-3m^2 \geqslant 0 \qquad \textit{car } m^2>0 \textit{ car } m\neq 0\\ &&\Leftrightarrow \quad & \frac{4}{3} \geqslant m^2\\ &&\Leftrightarrow \quad & -\frac{2}{\sqrt{3}} \leqslant m \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Or $-\frac{2}{\sqrt{3}} \leqslant m < 1 \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}$. Donc la dernière assertion est toujours vraie. Par conséquent, l'équation (F_m) admet deux solutions réelles (éventuellement confondues) données par

$$\boxed{x_1 = \frac{-m^2-\sqrt{m^2\left(4-3m^2\right)}}{2\left(m^2-1\right)} \quad \text{OU} \quad x_2 = \frac{-m^2+\sqrt{m^2\left(4-3m^2\right)}}{2\left(m^2-1\right)}.}$$

(b) Soient $m \in \left[-\frac{2}{\sqrt{3}};0\right[\cup]0;1[$ et

$$(G) \qquad -m^2+\sqrt{m^2\left(4-3m^2\right)} > 0.$$

On a déjà vu à la question précédente que pour $m \in \left[-\frac{2}{\sqrt{3}};0\right[\cup]0;1[$, on a $\Delta_m = m^2\left(4-3m^2\right) \geqslant 0$. Donc l'équation est bien définie sur $\left[-\frac{2}{\sqrt{3}};0\right[\cup]0;1[$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}(G) \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{m^2\left(4-3m^2\right)} > m^2\\ &\Leftrightarrow \quad m^2\left(4-3m^2\right) > m^4 \qquad \textit{car } m^2\left(4-3m^2\right) \geqslant 0 \textit{ et } m^2 \geqslant 0\\ &\Leftrightarrow \quad 4-3m^2 > m^2 \qquad \textit{car } m^2>0 \textit{ car } m\neq 0\\ &\Leftrightarrow \quad 4 > 4m^2\\ &\Leftrightarrow \quad m^2 < 1\\ &\Leftrightarrow \quad -1 < m < 1.\end{aligned}$$

Or $-\frac{2}{\sqrt{3}} < -1$. Conclusion, l'ensemble solution de (G) est

$$\boxed{\mathscr{S}_{(G)} =]-1;0[\cup]0;1[\,.}$$

13. Soit $m \in]-1;0[\cup]0;1[$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}(E_m) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}} = m \quad &\Leftrightarrow \quad x = m\sqrt{x^2+x+1} \qquad \textit{car } \sqrt{x^2+x+1}\neq 0\\ &\Leftrightarrow \quad x^2 = m^2\left(x^2+x+1\right) \ \text{ ET } \ xm \geqslant 0\\ &\Leftrightarrow \quad \left(m^2-1\right)+m^2x+m^2 \ \text{ ET } \ xm \geqslant 0\\ &\Leftrightarrow \quad (F_m) \ \text{ ET } \ xm \geqslant 0.\end{aligned}$$

Puisque $m \in]-1;0[\cup]0;1[\subseteq \left[-\frac{2}{\sqrt{3}};0\right[\cup]0;1[$, on en déduit que

$$(E_m) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x_1 = \frac{-m^2-\sqrt{m^2(4-3m^2)}}{2(m^2-1)} \quad \text{OU} \quad x = x_2 = \frac{-m^2+\sqrt{m^2(4-3m^2)}}{2(m^2-1)}\\ xm \geqslant 0\end{cases}$$

Premier cas si $m \in]-1;0[$, alors $x \leqslant 0$. Or $m^2-1<0$, $2\left(m^2-1\right)<0$, $-m^2-\sqrt{m^2\left(4-3m^2\right)}<0$ donc $x_1>0$. Ainsi, $x \neq x_1$. Cependant $m \in]-1;0[\subseteq \mathscr{S}_{(G)}$ et donc par la question précédente, $-m^2+\sqrt{m^2\left(4-3m^2\right)}>0$. Ainsi, $x_2<0$. Conclusion,

$$(E_m) \quad \Leftrightarrow \quad x = x_2 = \frac{-m^2+\sqrt{m^2\left(4-3m^2\right)}}{2\left(m^2-1\right)}.$$

Deuxième cas si $m \in]0;1[$, alors $x \geqslant 0$. On a toujours $x_1 > 0$ et comme $m \in]0;1[\subseteq \mathscr{S}_{(G)}$, on en déduit que également que $x_2 < 0$. Dans ce cas,

$$(E_m) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-m^2 - \sqrt{m^2(4-3m^2)}}{2(m^2-1)}.$$

Conclusion, on a dans chaque cas une unique solution. L'ensemble solution est alors donnée par

$$\boxed{\mathscr{S}_{]-1;0[} = \frac{-m^2 + \sqrt{m^2(4-3m^2)}}{2(m^2-1)} \quad \text{et} \quad \mathscr{S}_{]0;1[} = \frac{-m^2 - \sqrt{m^2(4-3m^2)}}{2(m^2-1)}.}$$

14. Soient $m \in \left]-\frac{2}{\sqrt{3}};-1\right[$ et $x \in \mathbb{R}$. On a de même que dans la question précédente,

$$(E_m) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x_1 = \frac{-m^2-\sqrt{m^2(4-3m^2)}}{2(m^2-1)} \quad \text{OU} \quad x = x_2 = \frac{-m^2+\sqrt{m^2(4-3m^2)}}{2(m^2-1)} \\ xm \geqslant 0 \end{cases}$$

Cependant, ici $m \notin \mathscr{S}_{(G)}$ donc $-m^2 + \sqrt{m^2(4-3m^2)} \leqslant 0$ puis $m^2 - 1 > 0$ donc $x_2 \leqslant 0$. D'autre part, on a $x_1 \leqslant 0$ et comme $m < 0$, on a $x \leqslant 0$. Ainsi dans ce cas, on a

$$(E_m) \quad \Leftrightarrow \quad x = x_1 = \frac{-m^2 - \sqrt{m^2(4-3m^2)}}{2(m^2-1)} \quad \text{OU} \quad x = x_2 = \frac{-m^2 + \sqrt{m^2(4-3m^2)}}{2(m^2-1)}$$

On a bien deux solutions :

$$\boxed{\mathscr{S}_{\left]-\frac{2}{\sqrt{3}};-1\right[} = \left\{\frac{-m^2 - \sqrt{m^2(4-3m^2)}}{2(m^2-1)}; \frac{-m^2 + \sqrt{m^2(4-3m^2)}}{2(m^2-1)}\right\}.}$$

15. Parmi toutes les disjonctions de cas précédents, nous n'avons pas traité le cas $m = -\frac{2}{\sqrt{3}}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} \left(E_{-\frac{2}{\sqrt{3}}}\right) \quad &\Leftrightarrow \quad x = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+x+1} \\ &\Leftrightarrow \quad 3x^2 = 4\left(x^2+x+1\right) \quad \text{ET} \quad x \leqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 = x^2+4x+4 = (x+2)^2 \quad \text{ET} \quad x \leqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = -2 \quad \text{ET} \quad x \leqslant 0 \end{aligned}$$

Conclusion, dans ce cas, on a une unique solution :

$$\boxed{\mathscr{S}_{-\frac{2}{\sqrt{3}}} = \{-2\}.}$$