Commentaires sur le Devoir Surveillé 6
Suites numériques et polynômes

Problème I - Suites numériques

1. Le théorème de la bijection n'est pas toujours bien présenté. Il faut rappeler toutes les hypothèses et ne pas le confondre avec le théorème des valeurs intermédiaires ! Une erreur sur le signe de la dérivée doit se détecter par le calcul des limites. Enfin, la limite en $-\infty$ nécessite la justification de la croissance comparée.

2. Beaucoup de parachutages et peu de rédaction propre pour l'existence de la suite. L'assertion pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe » n'a aucun sens car ne dépend pas de n. Dans $\mathscr{P}(n)$ vous supposer que TOUTE la suite est définie, ce n'est pas une récurrence. Pire : j'ai vu de nombreuses fois des $\mathscr{P}(n)$: « $\forall n \in \mathbb{N}$ .... ». Absurde, ridicule, impardonnable, intolérable, scandaleux, inadmissible. Je vous en avais déjà parlé en classe et je ne veux plus jamais revoir cette erreur qu'un terminal consciencieux ne ferait jamais.

3. Inutile de paraphraser la question en disant f *croissante donc pareil pour* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Puisque c'est le coeur de la question, une récurrence rigoureuse est demandée.

4. Une chance sur deux et nombreux sont ceux qui ont perdu... A retravailler en cas de moindre doute.

5. J'ai vu des représentations de fonctions pour les suites... Soyez critique sur ce que vous faites en retenant bien que des parachutages absurdes sont susceptibles de vous décrédibiliser auprès du correcteur.

6. Une question d'interro, donc c'est cadeau pourtant vous avez été nombreux ou à la passer ou à la résoudre qu'approximativement. L'énoncé précis du théorème des accroissements finis avec toutes les hypothèses était naturellement attendu.

7. Une gentille petite récurrence, pas de grosse difficulté. Il est aussi important de comprendre cette question.

8. Enoncer proprement le théorème d'encadrement pour en déduire que $v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. A partir de là il fallait voir que les deux suites étaient adjacentes pour conclure. Certains ont parachuté le fait que la différence tende vers 0 implique que les deux suites ont la même limite. TRES IMPORTANT : il faut d'abord démontrer que les deux suites convergent ! Ce qui n'est pas toujours clair. Exemple $u_n = (-1)^n$ et $v_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$. La différence tend bien vers 0 mais aucune des deux suites ne converge !!!

9. Il fallait juste reconnaître α par passage à la limite on obtenait le point fixe. Inutile de chercher la valeur de α.

Problème II - Polynômes

Partie 1 : Généralités

1. Question généreusement dotée lorsque l'on pensait à simplifier son résultat. Ne le laisser pas sous une forme mi-factorisée mi-développée !

2. Une propre récurrence double était attendue. Attention également à bien justifier le degré de P_{n+2} il est nécessaire de justifier que $\deg\left(\left(X+\frac{1}{2}\right)P_{n+1}\right) > \deg\left(-\frac{1}{16}P_n\right)$.

3. Encore une récurrence. Pas si difficile. A retravailler pour ceux qui l'ont passée.

4. Lorsque vous faites apparaitre la relation de récurrence, préciser alors que vous reconnaissez une suite récurrente linéaire d'ordre 2 pour justifier vos calculs qui suivent. Certains intuitent le résultat et le démontre par récurrence. Pourquoi pas, mais uniquement parce qu'ici le résultat était simple et donc pouvait se deviner, ce n'est pas toujours garanti dans un cas général.

5. Ceux qui ont réviser la question 6 du problème 4 du DS5 ont sans doute été avantagés, tant pis pour les autres : ne pas faire l'impasse sur la formule de Leibniz, à savoir et à savoir appliquer.

Partie 2 : Etude d'une composition

6. Facile et bien réussie.

7. Un peu plus longue mais pas très difficile non plus. Pensez bien à vérifier votre résultat avec la question 8. Attention cependant certains ayant vu la question 8 ont essayé de m'arnaquer. Cela ne marche pas et vous dessert plutôt !!!

8. Question un peu technique et généreusement dotée mais uniquement pour ceux qui parviennent jusqu'au bout de la question. Quelques-uns y arrivent avec succès.

9. Vous l'avez comprise globalement mais pas toujours bien rédigée.

10. Idem en un peu plus compliquée. N'oubliez pas de bien simplifier votre résultat. Ne laissez pas par exemple $(-1)^{2n}$ dans votre résultat.

Partie 3 : Racines du polynôme

11. Il aurait été bon de préciser que les θ_k sont bien entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Sinon une simple évaluation de P_n en r_k était attendue. Certains sont partis sur une récurrence bizarre où la gestion de k et n n'est pas clair du tout.

12. C'est cadeau ! Et pourtant le théorème de la bijection n'est pas toujours bien écrit.

13. Encore des parachutages, en disant « h bijective donc ok ». Soyez rigoureux et précis, allez dans le détail du raisonnement !

14. Très décevant. Je n'ai vu qu'une ou deux bonnes réponses alors que la question est facile. n racines distinctes pour un polynôme de degré n alors on les a toutes !!! Ce théorème est fondamental et classique. Ok pour la factorisation à l'exception du terme dominant. Un seul d'entre vous a pensé à me le justifié.

15. Pas bon non plus alors que c'est du cours sur la relation racine/coefficient.

Partie 4 : Conséquences

Une partie pas ou peu abordée et jamais avec succès. A reprendre. Certains sont partis sur le signe du terme dominant : c'est hors sujet dès que $n \geqslant 3$, n'inventez pas de résultat !

Problème III - Suites numériques

Partie 1 : La série harmonique

1. Vous avez confondu avec l'inégalité et même là vous n'avez pas été bon. Décevant, l'apprentissage du cours n'est pas négociable et ne semble pas efficace.

2. Peu de bonnes réponses. Souvent du bricolage approximatif et pas assez justifié.

3. De gros parachutage. Il fallait prendre $n \geqslant 2$ et ne sommer que de 2 à n puis seulement ensuite rajouter les premiers termes. Beaucoup ont sommer jusqu'à 1 ont vu que c'était « presque » pareil et on juste parachuté ce qui leur manquait. Attitude malhonnête, non scientifique, toujours repéré et qui sera condamné lors du concours.

4. Ok globalement mais pensez bien à justifier vos calculs de limites.

Partie 2 : Une suite implicite

5. Encore le théorème de la bijection, même commentaire qu'avant, n'oubliez pas l'hypothèse de continuité.

6. Certains ont bricolé avec $\mathrm{e}^{u_n} = \frac{1}{nu_n}$ cela marchait. Sinon il suffisait d'obtenir le signe de $f_n\left(\frac{1}{n}\right)$ puis d'invoquer la **stricte** croissance de f_n. Attention à ne pas écrire $f_n(0)$ qui n'existe pas !

7. Il n'y a pas que la convergence monotone dans la vie ! Ne forcez pas un résultat.

8. (a) Facile.
   (b) De bonnes réponses globalement alors que la question n'est pas forcément facile.

9. Justifier que $nu_n > 0$ quand dans votre équivalence vous passez à l'inverse.

10. Quelques bonnes réponses mais ce n'est pas toujours clair.

11. Plus dur. Là aussi soyez bien rigoureux à chaque étape.

12. Très peu traitée.

Partie 3 : La série associée

13. Bon le théorème de Cesàro n'est pas au programme mais comme nous l'avons vu, cela faisait une question facile.

14. Ok pour l'équation mais dans la position vous avez été très nombreux à ne parler que du voisinage de 0. Un DL était insuffisant pour obtenir le résultat sur $\mathbb{R}$ tout entier. Deux ou trois étudiants ont bien fait l'étude de fonction.

15. Pas très dur mais en fin de sujet.

16. Non traitée.