Correction de l'interrogation 12
Matrices et systèmes linéaires

1. Définir une matrice symétrique/antisymétrique.
   Solution. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
   - La matrice M est symétrique $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si ${}^tM = M$.
   - La matrice M est antisymétrique $M \in \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si ${}^tM = -M$.
2. Si (S) est compatible discuter suivant la valeur de son rang du nombre de solutions.
   Solution. Soit (S) un système compatible à n équations, p inconnues. Notons $r = \mathrm{rg}(\mathcal{S})$.
   - $r = p$ si et seulement si $(\mathcal{S})$ admet une unique solution.
   - $r < p$ si et seulement si $(\mathcal{S})$ admet une infinité de solution.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer A^{2n+1}. *La démonstration par récurrence n'est pas exigée.*
   Solution. On a
   $$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Donc
   $$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3A.$$
   Alors, on démontre par récurrence que
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^{2n+1} = 3^n A.}$$
4. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer les puissances de A.
   Solution. Posons $N = A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice N est nilpotente d'ordre 3 :
   $$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Puis
   $$N^3 = N^2 N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3.$$

Or les matrices N et I_3 commutent donc par la formule du binôme de Newton, pour tout $n \geqslant 3$,

$$\begin{aligned}
A^n = (I_3+N)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k I_3^{n-k} \\
&= I_3 + \binom{n}{1} N + \binom{n}{2} N^2 + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} N^k \\
&= I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 \qquad \text{car pour tout } k \geqslant 3,\ N^k = O_3 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On note que cette formule reste vraie si $n = 1$ ou $n = 0$. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

5. Résoudre le système $(\mathcal{S})$: $\begin{cases} x+y+2z=5 \\ x-y-z=1 \\ x+z=3 \end{cases}$.

Solution. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{S}) \left\{ \begin{array}{rrrcr} x & +y & +2z & = & 5 \\ x & -y & -z & = & 1 \\ x & & +z & = & 3 \end{array} \right.
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrcr} x & +y & +2z & = & 5 \\ & -2y & -3z & = & -4 \\ & -y & -z & = & -2 \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrcr} x & +y & +2z & = & 5 \\ & -y & -z & = & -2 \\ & -2y & -3z & = & -4 \end{array} \right. \qquad L_2 \leftrightarrow L_3 \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrcr} x & +y & +2z & = & 5 \\ & y & +z & = & 2 \\ & 2y & +3z & = & 4 \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{array} \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrcr} x & +y & +2z & = & 5 \\ & y & +z & = & 2 \\ & & z & = & 0 \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{array} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - y - 2z = 5 - 2 = 3 \\ y = 2 - z = 2 \\ z = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusion l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$ est :

$$\boxed{\mathscr{S} = \{(3,2,0)\}.}$$

6. Résoudre le système $(\mathcal{S})$: $\begin{cases} x-3y+z=1 \\ 2x+y+z=-1 \\ x+11y-z=5 \end{cases}$.

Solution. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{S}) \left\{ \begin{array}{rrrcr} x & -3y & +z & = & 1 \\ 2x & +y & +z & = & -1 \\ x & +11y & -z & = & 5 \end{array} \right.
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrcr} x & -3y & +z & = & 1 \\ & 7y & -z & = & -3 \\ & 14y & -2z & = & 4 \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrcr} x & -3y & +z & = & 1 \\ & 7y & -z & = & -3 \\ & & 0 & = & 10 \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2. \end{array}
\end{aligned}$$

Le système est incompatible. Conclusion l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$ est :

$$\boxed{\mathscr{S} = \emptyset.}$$

7. Calculer le rang de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}$.

Solution. On a les calculs suivants :

$$\begin{aligned}
A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & -5 \end{pmatrix} &\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 7 & 4 & -5 \end{pmatrix} && L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\
&\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \\ 7 & 4 & -5 \end{pmatrix} && L_1 \leftrightarrow L_2 \\
&\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -11 \\ 0 & -3 & -33 \end{pmatrix} && \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1 \end{array} \\
&\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 4 \\ 0 & \boxed{-1} & -11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2
\end{aligned}$$

La dernière matrice est échelonnée en ligne avec 2 pivots. Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{rg}\,(A) = 2.}$$

8. Calculer le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Solution. On a les calculs suivants :

$$\begin{aligned}
A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} &\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -6 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & -3 \end{pmatrix} && \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \\
&\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & -6 & 3 & -1 \end{pmatrix} && L_2 \leftrightarrow L_3 \\
&\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & -1 \\ 0 & \boxed{3} & -2 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -7 \end{pmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2.
\end{aligned}$$

La dernière matrice est échelonnée en ligne avec 3 pivots. Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{rg}\,(A) = 3.}$$

9. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : y'' + y' + y = \cos(x)$.

Solution. La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc (E) admet des solutions sur $\mathbb{R}$. Soit (E_c) l'équation caractéristique associée : $(E_c) : r^2 + r + 1 = 0$. Les solutions de cette équation sont les racines troisièmes de l'unité différentes de 1 :

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{et} \qquad \overline{j} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Par conséquent, l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (E) est donné par

$$\mathscr{S}_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) \end{array} \;\middle|\; (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Considérons l'équation

$$(F) : \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ z''(x) + z'(x) + z(x) = \mathrm{e}^{ix}.$$

On note que i n'est pas racine de (E_c). Soit $a \in \mathbb{C}$. Posons $z : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & a\,\mathrm{e}^{ix} \end{array}$. La fonction z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} & z \text{ est solution de } (F) \\ \Leftrightarrow\quad & \forall x \in \mathbb{R},\ -a\,\mathrm{e}^{ix} + ia\,\mathrm{e}^{ix} + a\,\mathrm{e}^{ix} = \mathrm{e}^{ix} \\ \Leftrightarrow\quad & \forall x \in \mathbb{R},\ a(-1+i+1) = 1 \qquad \text{car } \mathrm{e}^{ix} \neq 0 \\ \Leftrightarrow\quad & a = \frac{1}{i} = -i. \end{aligned}$$

Donc $z : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & -i\,\mathrm{e}^{ix} \end{array}$ est une solution de (F). Donc $y = \mathrm{Re}\,(z)$ est une solution de (E). Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$y(x) = \mathrm{Re}\left(-i\,\mathrm{e}^{ix}\right) = \mathrm{Re}\left(-i\left(\cos(x) + i\sin(x)\right)\right) = \sin(x).$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x) + \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) \end{array} \middle| (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

10. Résoudre sur $]-1;1[$ l'équation $(E) : \left(1-x^2\right)y'' - \left(x + \sqrt{1-x^2}\right)y' + y = 0$. *Indication : poser* $x = \cos(t)$.

Solution. Soit y une fonction deux fois dérivable sur $]-1;1[$. Pour tout $t \in]0;\pi[$, posons $z(t) = y(\cos(t))$. Puisque pour tout $t \in]0;\pi[$, $\cos(t) \in]-1;1[$ et que la fonction cosinus est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction y deux fois dérivable sur $]-1;1[$, on en déduit que z est deux fois dérivable sur $]0;\pi[$. De plus, pour tout $x \in]-1;1[$, $y(x) = z(\arccos(x))$ et par suite, pour tout $x \in]-1;1[$,

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} z'(\arccos(x)) \\ y''(x) &= -\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{-2x}{\left(1-x^2\right)^{3/2}} z'(\arccos(x)) + \left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2 z''(\arccos(x)) \\ &= -\frac{x}{\left(1-x^2\right)^{3/2}} z'(\arccos(x)) + \frac{1}{1-x^2} z''(\arccos(x)). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} & y \text{ est solution de } (E) \\ \Leftrightarrow\quad & \forall x \in]-1;1[,\ \left(1-x^2\right)y''(x) - \left(x + \sqrt{1-x^2}\right)y'(x) + y(x) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \forall x \in]-1;1[,\ \left(1-x^2\right)\left(-\frac{x}{\left(1-x^2\right)^{3/2}} z'(\arccos(x)) + \frac{1}{1-x^2} z''(\arccos(x))\right) \\ & \qquad - \left(x + \sqrt{1-x^2}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} z'(\arccos(x))\right) + z(\arccos(x)) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \forall x \in]-1;1[,\ -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} z'(\arccos(x)) + z''(\arccos(x)) \\ & \qquad + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} z'(\arccos(x)) + z'(\arccos(x)) + z(\arccos(x)) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \forall x \in]-1;1[,\ z''(\arccos(x)) + z'(\arccos(x)) + z(\arccos(x)) = 0. \end{aligned}$$

Posons pour tout $x \in]-1;1[$, $t = \arccos(x)$ alors $t \in]0;\pi[$ et

$$y \text{ est solution de } (E) \quad \Leftrightarrow \quad \forall t \in]0;\pi[,\ z''(t) + z'(t) + z(t) = 0.$$

Donc par la question précédente, on obtient

$$\begin{aligned} & y \text{ est solution de } (E) \\ \Leftrightarrow\quad & \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in]0;\pi[,\ z(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) \\ \Leftrightarrow\quad & \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in]-1;1[,\ y(x) = z(\arccos(x)) \\ & \qquad = \mathrm{e}^{-\frac{\arccos(x)}{2}}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\arccos(x)\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\arccos(x)\right)\right). \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) sur $]-1;1[$ est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{rcl}]-1;1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{-\frac{\arccos(x)}{2}} \left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\arccos(x)\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\arccos(x)\right)\right) \end{array} \middle| (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$