Correction de l'interrogation 15
Analyse Asymptotique II

1. Enoncer la propriété permettant de dériver un développement limité.
Solution. Soient I un voisinage de 0 et $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que
   - f admet un développement limité à l'ordre n en 0 donné par
$$f(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o\left(x^n\right), \qquad \left(a_k\right)_{k \in [\![0\,;\,n]\!]} \in \mathbb{R}^{n+1}.$$
   - f est dérivable sur I.
   - La fonction f' admet un développement limité à l'ordre $n-1$ en 0.

   Alors le développement limité de f' est donné par
$$f'(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} + o\left(x^{n-1}\right).$$

2. Développer $\sin(a+b)$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ puis résoudre l'équation $\cos(x) - \cos(2x) = \sin\left(\frac{3x}{2}\right)$.
Solution. On a
$$\boxed{\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \cos(b)\sin(a).}$$
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a
$$\begin{aligned}
\cos(x) - \cos(2x) = \sin\left(\frac{3x}{2}\right) \quad & \Leftrightarrow \quad -2\sin\left(\frac{x+2x}{2}\right)\sin\left(\frac{x-2x}{2}\right) = \sin\left(\frac{3x}{2}\right) \\
& \Leftrightarrow \quad -2\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin\left(\frac{-x}{2}\right) = \sin\left(\frac{3x}{2}\right) \\
& \Leftrightarrow \quad 2\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sin\left(\frac{3x}{2}\right) \\
& \Leftrightarrow \quad \sin\left(\frac{3x}{2}\right) = 0 \ \text{ OU } \ 2\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{3x}{2} \equiv 0 \ [\pi] \ \text{ OU } \ \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} \\
& \Leftrightarrow \quad x \equiv 0 \left[\frac{2\pi}{3}\right] \ \text{ OU } \ \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} \ [2\pi] \ \text{ OU } \ \frac{x}{2} = \frac{5\pi}{6} \ [2\pi] \\
& \Leftrightarrow \quad x \equiv 0 \left[\frac{2\pi}{3}\right] \ \text{ OU } \ x = \frac{\pi}{3} \ [4\pi] \ \text{ OU } \ x = \frac{5\pi}{3} \ [4\pi].
\end{aligned}$$
Conclusion, l'ensemble solution est donné par
$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \frac{2k\pi}{3} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{3} + 4k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{3} + 4k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}.}$$

3. Sans justification ou démonstration, donner un équivalent le plus simple possible.
Solution.
   3.1 On a
$$\frac{x^2 + \mathrm{e}^{-2x} + \sqrt{x^5}}{\ln(2x) + 2x - 3} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{x^{3/2}}{2}.$$
   Explications : Par croissance comparée, $\mathrm{e}^{-2x} \underset{x \to +\infty}{\ll} x^2 \underset{x \to +\infty}{\ll} \sqrt{x^5}$, on en déduit donc que
$$x^2 + \mathrm{e}^{-2x} + \sqrt{x^5} \underset{x \to +\infty}{\sim} \sqrt{x^5} = x^{5/2}.$$

De même, on a $-3 \underset{x\to+\infty}{\ll} ln\,(2x) \underset{x\to+\infty}{\ll} 2x$. Par conséquent,

$$\ln(2x) + 2x - 3 \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x.$$

Donc par quotient d'équivalents :

$$\boxed{\frac{x^2 + \mathrm{e}^{-2x} + \sqrt{x^5}}{\ln(2x) + 2x - 3} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x^{5/2}}{2x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^{3/2}}{2}.}$$

3.2 On a

$$\frac{\mathrm{sh}(x)\,(\mathrm{ch}(x)-1)}{\sin(x)\,(\cos(x)-1)} \underset{x\to 0}{\sim} -1.$$

Explications : On a $\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$. Donc $\mathrm{ch}(x) - 1 \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$ i.e. $\mathrm{ch}(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$. De même, $\cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$. De plus $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$. Donc par produit et quotient :

$$\boxed{\frac{\mathrm{sh}(x)\,(\mathrm{ch}(x)-1)}{\sin(x)\,(\cos(x)-1)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x\frac{x^2}{2}}{x\left(-\frac{x^2}{2}\right)} \underset{x\to 0}{\sim} -1.}$$

4. Sans justification ou démonstration, donner un équivalent le plus simple possible.
Solution.

4.1 On a

$$\frac{\ln(1+\tan(x))}{\sqrt{\sin(x)}} \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{x}.$$

Explications : Posons $u(x) = \tan(x)$. Alors $u(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Or $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$. Ainsi,

$$\ln(1+\tan(x)) \underset{x\to 0}{\sim} \tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x.$$

Attention à ne pas faire de composée d'équivalents ! Il est FAUX d'affirmer que « $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ implique $\ln(1+\tan(x)) \underset{x\to 0}{\sim} \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.

D'autre part, on a $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ et donc par élévation à la puissance $1/2$ (ce qui est une composée très particulière et autorisée), on a $\sqrt{\sin(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{x}$.

Finalement, par quotient d'équivalents :

$$\boxed{\frac{\ln(1+\tan(x))}{\sqrt{\sin(x)}} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{x}.}$$

4.2 On a

$$\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} 1.$$

Explications : Au voisinage de $+\infty$, on a

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1} &= |x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} - \sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)\\ &= x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} - \sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right).\end{aligned}$$

On sait que $\sqrt{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 + \frac{u}{2} + o(u)$. Posons $u(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$. Alors

- $u(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
- et $o(u(x)) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$

Ainsi,

$$\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} \underset{x\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)+o\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

De même, en posant $v(x) \underset{x\to+\infty}{=} -\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$, on a $v(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $o\left(v(x)\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$, donc

$$\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} \underset{x\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)+o\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{=} 1-\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1} &\underset{x\to+\infty}{=} x\left(1+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)-\left(1-\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)\\
&\underset{x\to+\infty}{=} x\left(1+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)-\left(1-\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)\\
&\underset{x\to+\infty}{=} x\left(\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\
&\underset{x\to+\infty}{=} 1+o\left(1\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} 1.}$$

5. Déterminer un développement à l'ordre 5 en 0 de $f : x \mapsto \frac{\arctan(x)}{1+x^2}$ et **en déduire** celui de $F : x \mapsto \frac{\arctan^2(x)}{2}$ à l'ordre 6 en 0.
Solution. Au voisinage de 0, on a

$$\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o\left(x^5\right).$$

De plus,

$$\frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1-x^2+x^4+o\left(x^4\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\\
&\underset{x\to 0}{=} \left(x-\tfrac{x^3}{3}+\tfrac{x^5}{5}+o\left(x^5\right)\right)\left(1-x^2+x^4+o\left(x^4\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} x \quad -x^3 \quad +x^5 \quad +o\left(x^5\right)\\
&\qquad\quad -\tfrac{x^3}{3} \quad +\tfrac{x^5}{3} \quad +o\left(x^5\right)\\
&\qquad\qquad\qquad +\tfrac{x^5}{5} \quad +o\left(x^5\right)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad +o\left(x^5\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} x-\tfrac{4x^3}{3}+\tfrac{23x^5}{15}+o\left(x^5\right).
\end{aligned}$$

De plus,

- La fonction f admet donc un développement limité à l'ordre 5.
- La fonction F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent, la fonction F admet un développement limité à l'ordre 6 et celui-ci est donné par

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} F(0)+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{3}+\frac{23x^6}{90}+o\left(x^6\right).$$

Comme $F(0)=\arctan(0)/2=0$, on conclut que

$$\boxed{F(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{3}+\frac{23x^6}{90}+o\left(x^6\right).}$$

6. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$. A l'aide de la formule de Taylor-Young, déterminer le développement de $f : x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$ en a à l'ordre n.
Solution. Soient $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$. La fonction f est $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et de plus pour tout $k \in [\![0; n]\!]$,
$$f^{(k)}(a) = 2^k \, \mathrm{e}^{2a} .$$
Donc par la formule de Taylor-Young,
$$\boxed{f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k \, \mathrm{e}^{2a}}{k!} (x-a)^k + o\left((x-a)^n\right).}$$

7. Déterminer le développement limité de $f : x \mapsto \cos(\sin(x))$ à l'ordre 4 en 0.
Solution. Au voisinage de 0, on a
$$\cos(\sin(x)) \underset{x\to 0}{=} \cos\left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)\right).$$
Or $\cos(u) \underset{u\to 0}{=} 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24} + o\left(u^4\right)$. Posons $u(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)$. Alors,
   - $u(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
   - De plus,
$$\begin{aligned} u(x)^2 &\underset{x\to 0}{=} \left(x - \tfrac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)\right)\left(x - \tfrac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} x^2 \quad - \tfrac{x^4}{6} \quad + o\left(x^4\right) \\ &\qquad\quad\ - \tfrac{x^4}{6} \quad + o\left(x^4\right) \\ &\qquad\qquad\qquad + o\left(x^4\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} x^2 - \tfrac{x^4}{3} + o\left(x^4\right). \end{aligned}$$
   - Comme $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, on en déduit que $u(x)^4 \underset{x\to 0}{\sim} x^4$ i.e. $u(x)^4 \underset{x\to 0}{=} x^4 + o\left(x^4\right)$.
   - Enfin, $o\left(u(x)^4\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^4\right)$.

Par conséquent, on obtient,
$$\begin{aligned} \cos(\sin(x)) &\underset{x\to 0}{=} \cos(u(x)) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 - \tfrac{1}{2}(x^2 \quad - \tfrac{x^4}{3} + o\left(x^4\right)) \\ &\qquad\quad + \tfrac{1}{24}(x^4 \qquad\qquad + o\left(x^4\right)) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + o\left(x^4\right). \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{5x^4}{24} + o\left(x^4\right) \end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o\left(x^4\right).}$$

8. Déterminer le développement limité de $f : x \mapsto \ln\left(1 + \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right)$ à l'ordre 3 en 0^+.
Solution. Au voisinage de 0, on a
$$\begin{aligned} \ln\left(1 + \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right) &\underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{=} \ln\left(1 + 1 + \frac{x}{2} + \frac{(1/2)(-1/2)}{2}x^2 + \frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)}{6}x^3 + o\left(x^3\right)\right. \\ &\qquad \left. - \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{(1/2)(-1/2)}{2}x^2 - \frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)}{2}x^3 + o\left(x^3\right)\right)\right) \\ &\underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{=} \ln\left(2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o\left(x^3\right) - \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o\left(x^3\right)\right)\right) \\ &\underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{=} \ln\left(1 + x + \frac{x^3}{8} + o\left(x^3\right)\right). \end{aligned}$$
Or $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o\left(u^3\right)$. Posons $u(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{=} x + \frac{x^3}{8} + o\left(x^3\right)$. Alors,

- $u(x) \underset{\substack{x \to 0 \\ x>0}}{\longrightarrow} 0$.
- Puis,

$$\begin{aligned} u(x)^2 &\underset{\substack{x \to 0 \\ x>0}}{=} \left(x + \frac{x^3}{8} + o\left(x^3\right)\right)\left(x + \frac{x^3}{8} + o\left(x^3\right)\right) \\ &\underset{\substack{x \to 0 \\ x>0}}{=} x^2 + o\left(x^3\right). \end{aligned}$$

- Puisque $u(x) \underset{\substack{x \to 0 \\ x>0}}{\sim} x$, on a $u(x)^3 \underset{\substack{x \to 0 \\ x>0}}{\sim} x^3$ i.e. $u(x)^3 \underset{\substack{x \to 0 \\ x>0}}{=} x^3 + o\left(x^3\right)$.
- Enfin $o\left(u(x)^3\right) \underset{\substack{x \to 0 \\ x>0}}{=} o\left(x^3\right)$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{\substack{x \to 0 \\ x>0}}{=} \ln\left(1 + u(x)\right) \\ &\underset{\substack{x \to 0 \\ x>0}}{=} x + \frac{x^3}{8} + o\left(x^3\right) - \frac{1}{2}\left(x^2 + o\left(x^3\right)\right) + \frac{1}{3}\left(x^3 + o\left(x^3\right)\right) + o\left(x^3\right) \\ &\underset{\substack{x \to 0 \\ x>0}}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{11x^3}{24} + o\left(x^3\right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{\substack{x \to 0 \\ x>0}}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{11x^3}{24} + o\left(x^3\right).}$$

9. Soit $f : x \mapsto \frac{\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)^x - 1}{x^2}$. Déterminer la limite de f en 0^+.
Solution. Pour tout x au voisinage de 0^+, on a

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{\substack{x \to 0 \\ x>0}}{=} \frac{1}{x^2}\left(e^{x\ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)} - 1\right) \\ &\underset{\substack{x \to 0 \\ x>0}}{=} \frac{1}{x^2}\left(e^{x\ln\left(\frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right) - 1}{x}\right)} - 1\right) \\ &\underset{\substack{x \to 0 \\ x>0}}{=} \frac{1}{x^2}\left(e^{x\ln\left(1 + \frac{x}{2} + o(x)\right)} - 1\right). \end{aligned}$$

Or $\ln(1+u) \underset{u \to 0}{=} u + o(u)$. Posons $u(x) \underset{\substack{x \to 0 \\ x>0}}{=} \frac{x}{2} + o(x)$.

- $u(x) \underset{\substack{x \to 0 \\ x>0}}{\longrightarrow} 0$.
- Et $o\left(u(x)\right) \underset{\substack{x \to 0 \\ x>0}}{=} o(x)$.

Ainsi,

$$\ln\left(1 + u(x)\right) \underset{\substack{x \to 0 \\ x>0}}{=} \frac{x}{2} + o(x) + o(x) \underset{\substack{x \to 0 \\ x>0}}{=} \frac{x}{2} + o(x).$$

Donc

$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{\substack{x\to 0\\x>0}}{=} \frac{1}{x^2}\left(\mathrm{e}^{x\left(\frac{x}{2}+o\left(x^2\right)\right)}-1\right)\\
&\underset{\substack{x\to 0\\x>0}}{=} \frac{1}{x^2}\left(\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)}-1\right)\\
&\underset{\substack{x\to 0\\x>0}}{=} \frac{1}{x^2}\left(1+\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)+o\left(\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)-1\right)\\
&\underset{\substack{x\to 0\\x>0}}{=} \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)\\
&\underset{\substack{x\to 0\\x>0}}{=} \frac{1}{2}+o\left(1\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = \frac{1}{2}.}$$

10. Soit $f : x \mapsto \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$. Déterminer le comportement asymptotique de f en $+\infty$.
Solution. Pour tout $x > 1$, on a

$$f(x) = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1} = \frac{x\,|x|\,\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = x\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1-\frac{1}{x}} \qquad \text{car } x>0.$$

Posons pour tout $x > 1$, $u(x) = \frac{1}{x}$, alors $u(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc

$$\frac{1}{1-\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

De plus $\sqrt{1+v} \underset{v\to 0}{=} 1+\frac{v}{2}+o\left(v\right)$. En posant $v(x) = \frac{1}{x^2}$, on a $v(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $o\left(v(x)^2\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Par conséquent,

$$\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \underset{x\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{x\to+\infty}{=} x\left(1+\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{x^2}+o\left(\tfrac{1}{x^2}\right)\right)\left(1+\tfrac{1}{2x^2}+o\left(\tfrac{1}{x^2}\right)\right)\\
&\underset{x\to+\infty}{=} x[1 \quad +\tfrac{1}{2x^2} \quad +o\left(\tfrac{1}{x^2}\right)\\
&\qquad +\tfrac{1}{x} \quad +o\left(\tfrac{1}{x^2}\right)\\
&\qquad +\tfrac{1}{x^2} \quad +o\left(\tfrac{1}{x^2}\right)\\
&\qquad +o\left(\tfrac{1}{x^2}\right)]\\
&\underset{x\to+\infty}{=} x[1+\tfrac{1}{x}+\tfrac{3}{2x^2}+o\left(\tfrac{1}{x^2}\right)]\\
&\underset{x\to+\infty}{=} x+1+\tfrac{3}{2x}+o\left(\tfrac{1}{x}\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la courbe représentative de } f \text{ admet une asymptote en } +\infty \text{ d'équation } y = x+1.}$$

De plus, on a

$$f(x)-(x+1) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{3}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{i.e.} \qquad f(x)-(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3}{2x} > 0.$$

Or deux équivalents ont même signe sur le voisinage considéré. Conclusion,

$$\boxed{\text{la courbe représentative de } f \text{ est au-dessus de son asymptote au voisinage de } +\infty.}$$