Correction de l'interrogation 19
Espaces Vectoriels

1. Définir et caractériser deux espaces en somme directe.
Solution. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Les espaces F et G sont en somme directe si et seulement si (par définition)
$$\forall (x,x') \in F^2,\ \forall (y,y') \in G^2, \qquad (x+y = x'+y') \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$
si et seulement si (par caractérisation) :
$$F \cap G = \{0_E\}.$$

2. Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ à l'aide du changement de variable $t = \sin(u)$.
Solution. Posons pour tout $u \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, posons $t = \sin(u)$ i.e. $u = \arcsin(t)$ (car $u \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$). Alors $\mathrm{d}t = \cos(u)\,\mathrm{d}u$. Ainsi,
$$\begin{aligned} I = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(u)}\cos(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2(u)}\cos(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u)\,\mathrm{d}u \qquad\qquad \text{car } \cos(u) \geqslant 0 \text{ pour } u \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2u)}{2}\,\mathrm{d}u \\ &= \left[\frac{u}{2} + \frac{\sin(2u)}{4}\right]_{u=0}^{u=\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{4} + 0. \end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{I = \frac{\pi}{4}.}$$

3. Sans justification, dire si E est un espace vectoriel ou non. *Aucun point si l'une des deux réponses est fausse.*

3.1 $E = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; a_{11}a_{22} = 0 \right\}$.
Solution. L'ensemble E n'est pas un espace vectoriel.
Explication. On note que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont deux éléments de E et pourtant $A+B = I_2 \notin E$. Donc E n'est pas stable par combinaison linéaire. Conclusion,
$$\boxed{E \text{ n'est pas un espace vectoriel.}}$$

3.2 $E = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n = 0 \right\}$.
Solution. L'ensemble E est un espace vectoriel.
Explication. Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- $E \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, par définition.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$, alors en prenant $N = 0$, on a bien $\forall n \geqslant N$, $u_n = 0$. Donc $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \in E$.
- Soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et $\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \in E^2$. Alors par définition de E, il existe N_1 tel que pour tout $n \geqslant N_1$, on a $u_n = 0$ et de même il existe N_2 tel que pour tout $n \geqslant N_2$, on a $v_n = 0$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \lambda u_n + \mu v_n$ et $N = \max(N_1, N_2)$. Alors, pour tout $n \geqslant N$, on observe que $n \geqslant N_1$ et $n \geqslant N_2$, par conséquent,
$$\forall n \geqslant N, \quad w_n = \lambda u_n + \mu v_n = 0.$$
Donc $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ et E est stable par combinaisons linéaires.

Comme $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un espace vectoriel, on conclut que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et donc à ce titre,

$$\boxed{E \text{ est un espace vectoriel.}}$$

4. Démontrer si $E = \left\{ f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,\middle|\, f'(1) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + f(1) \right\}$ est un espace vectoriel ou non.

   Solution. Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

   - On a $E \subseteq scrC^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ par définition.
   - Si f est la fonction nulle : $f = 0_{\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})}$. Alors, $f'(1) = 0$ et $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + f(1) = \int_0^1 0\,\mathrm{d}t + 0 = 0$. Donc $f'(1) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + f(1)$. Ainsi, $0_{\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})} \in E$.
   - Soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $(f,g) \in E^2$. Posons $h = \lambda f + \mu g$. Alors, h est bien $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}
h'(1) &= \lambda f'(1) + \mu g'(1) \\
&= \lambda\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + f(1)\right) + \mu\left(\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t + g(1)\right) && \text{car } f \in E \text{ et } g \in E \\
&= \int_0^1 \lambda f(t)\,\mathrm{d}t + \lambda f(1) + \int_0^1 \mu g(t)\,\mathrm{d}t + \mu g(1) \\
&= \int_0^1 \lambda f(t) + \mu g(t) ddt + \lambda f(1) + \mu g(1) \\
&= \int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t + h(1).
\end{aligned}$$

     Donc $h \in E$ et E est stable par combinaisons linéaires.

   Or $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est un espace vectoriel donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et à ce titre,

$$\boxed{E \text{ est un espace vectoriel.}}$$

5. Soient $F = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & a \\ b & a+b \end{pmatrix} \,\middle|\, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$. Déterminer $F \cap G$.

Solution. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
A \in F \cap G \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A \in F \\ A \in G \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ A = x\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & x+y \\ 0 & x \end{pmatrix} \\ \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ A = \begin{pmatrix} a+b & a \\ b & a+b \end{pmatrix} \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \exists (x,y,a,b) \in \mathbb{R}^4,\ A = \begin{pmatrix} x+y & x+y \\ 0 & x \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x+y & x+y \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a \\ b & a+b \end{pmatrix} \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \exists (x,y,a,b) \in \mathbb{R}^4,\ A = \begin{pmatrix} x+y & x+y \\ 0 & x \end{pmatrix} \\ x+y = a+b \\ x+y = a \\ 0 = b \\ x = a+b \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \exists (x,y,a,b) \in \mathbb{R}^4,\ A = \begin{pmatrix} x+y & x+y \\ 0 & x \end{pmatrix} \\ x+y = a \\ x+y = a \\ b = 0 \\ x = a \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \exists (x,y,a,b) \in \mathbb{R}^4,\ A = \begin{pmatrix} x+y & x+y \\ 0 & x \end{pmatrix} \\ y = 0 \\ b = 0 \\ x = a \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists a \in \mathbb{R},\ A = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & a \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{F \cap G = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right).}$$

6. Soient $F = \{\, P \in \mathbb{R}_3[X] \mid 0 \text{ est une racine de multiplicité} \geqslant 2 \text{ de } P \,\}$ et $G = \operatorname{Vect}\left(1, X^2\right)$. Déterminer $F+G$.
Solution. On commence par noter que

$$\begin{aligned}
F &= \left\{\, P \in \mathbb{R}_3[X] \;\middle|\; X^2 | P \,\right\} \\
&= \left\{\, X^2 Q \in \mathbb{R}_3[X] \;\middle|\; Q \in \mathbb{R}_1[X] \,\right\} \\
&= \left\{\, X^2(aX+b) \in \mathbb{R}_3[X] \;\middle|\; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \,\right\} \\
&= \operatorname{Vect}\left(X^2, X^3\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$F+G = \operatorname{Vect}\left(X^2, X^3\right) + \operatorname{Vect}\left(1, X^2\right) = \operatorname{Vect}\left(X^2, X^3, 1, X^2\right) = \operatorname{Vect}\left(X^2, X^3, 1\right).$$

En permutant les vecteurs, on obtient,

$$\boxed{F+G = \operatorname{Vect}\left(1, X^2, X^3\right).}$$

7. Montrer que $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right)$ et $G = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}\right)$ sont supplémentaires dans $E = \mathbb{R}^4$.

Solution. Commençons par calculer l'intersection. Soit $u \in \mathbb{R}^4$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
u \in F \cap G \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} u \in F \\ u \in G \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \exists\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ u = x\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\y\\0\\0\end{bmatrix} \\ \exists\,(z,t) \in \mathbb{R}^2,\ u = z\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}z\\t\\z\\t\end{bmatrix} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \exists\,(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ u = \begin{bmatrix}x\\y\\0\\0\end{bmatrix} \\ x = z \\ y = t \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \exists\,(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ u = \begin{bmatrix}x\\y\\0\\0\end{bmatrix} \\ x = y = z = t = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad u = 0_{\mathbb{R}^4}.
\end{aligned}$$

Par conséquent $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ et F et G sont en somme directe.
De plus, montrons que $F + G = E$. On a

$$F + G = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right) + \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}\right).$$

Or les opérations élémentaires sur les vecteurs ne modifient pas l'espace engendré. Donc

$$\begin{aligned}
F + G &= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right) \qquad \begin{matrix} C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 - C_2 \end{matrix} \\
&= \left\{ a\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} + d\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix} \;\middle|\; (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \right\}.
\end{aligned}$$

Donc on a bien $F + G = \mathbb{R}^4 = E$.
Conclusion,

$$\boxed{F \oplus G = E.}$$

8. On pose

$$F = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N},\ \text{si } n \text{ est pair, } u_n = 0 \right\}$$
$$G = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N},\ \text{si } n \text{ est impair, } u_n = 0 \right\}$$

Montrer que F et G sont supplémentaires dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Solution. Montrons que $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}\}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F \cap G$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n est pair, $u_n = 0$ car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ et si n est impair, $u_n = 0$ car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in G$. Donc dans tous les cas, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$. Ainsi, $F \cap G \subseteq \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}\}$. Réciproquement, $\{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}\} \subseteq F \cap G$. Donc $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}\}$ et les espaces F et G sont en somme directe.
Montrons maintenant que $F + G = E$. Puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, $F + G \subseteq E$. Réciproquement soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$. Alors posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \begin{cases} u_n \text{ si } n \text{ est pair} \\ 0 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad w_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ u_n \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Alors, on note que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in G$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$. De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n est pair on a $v_n + w_n = u_n + 0 = u_n$ et si n est impair on a $v_n + w_n = 0 + u_n = u_n$. Donc dans tous les cas $u_n = v_n + w_n$ et donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} + (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F + G$. D'où $E \subseteq F + G$. Donc $E = F + G$.
Conclusion,

$$\boxed{E = F \oplus G.}$$

9. Déterminer la multiplicité de 3 pour le polynôme $P = X^4 - 6X^3 + 8X^2 + 6X - 9$.
Solution. On a

$$P(3) = 3^4 - 6 \times 27 + 8 \times 9 + 6 \times 3 - 9 = 9\,(9 - 18 + 8 + 2 - 1) = 9\,(19 - 19) = 0.$$

Donc 3 est une racine de multiplicité au moins 1. De plus, $P' = 4X^3 - 18X^2 + 16X + 6$ et donc

$$P'(3) = 4 \times 27 - 18 \times 9 + 16 \times 3 + 6 = 6\,(18 - 27 + 8 + 1) = 6\,(27 - 27) = 0.$$

Donc 3 est une racine de multiplicité au moins 2. Poursuivons, $P'' = 12X^2 - 36X + 16$ et donc

$$P''(3) = 12 \times 9 - 36 \times 3 + 16 = 4\,(27 - 27 + 4) = 16 \neq 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{3 est une racine double.}}$$

10. Déterminer la multiplicité de i pour le polynôme $P = X^{10} + X^8 + X^2 + 1$.
Solution. On observe que

$$P(i) = i^{10} + i^8 + i^2 + 1 = (-1)^5 + (-1)^4 - 1 + 1 = -1 + 1 + 0 = 0.$$

Donc i est une racine de P. De plus, $P' = 10X^9 + 8X^7 + 2X$. Donc

$$P'(i) = 2\left(5i^9 + 4i^7 + i\right) = 2i\left(5i^8 + 4i^6 + 1\right) = 2i\left(5\,(-1)^4 + 4\,(-1)^3 + 1\right) = 2i\,(5 - 4 + 1) = 4i \neq 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{i \text{ est une racine simple de } P.}$$