Interrogation 20
Familles de vecteurs

Nom/Prénom :

Note :

1. Définir et caractériser une famille libre.

....

....

....

....

....

....

2. Enoncer le théorème de la base adaptée.

....

....

....

....

....

....

3. Réciter le développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\tan(x)$ et calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{x\left(e^x-(\cos(x)+x)\right)}{\tan(x)-\sin(x)}$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4. Soit $P = X^3 + X^2 + X + 1$. Montrer que $\mathscr{G} = (P, P', P'', P''')$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_3[X]$.

5. Soit $F = \left\{ (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n \right\}$. Déterminer une famille génératrice de F.

6. Soit $\mathscr{L} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$. La famille $\mathscr{L}$ est-elle libre ?

7. Soient $f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^x$, $f_2 : x \mapsto (x-1)^2 (x-2)$, $f_3 : x \mapsto \ln(x)$ et $\mathscr{L} = (f_1, f_2, f_3)$. Montrer que $\mathscr{L}$ est libre dans $\mathscr{C}(]0; +\infty[, \mathbb{R})$.

8. Soient $\mathscr{B} = ((2, 3, -1), (1, -1, -2))$. Justifier que $\mathscr{B}$ est une base de $E = \mathrm{Vect}(\mathscr{B})$ puis déterminer les coordonnées de $(1, 9, 4)$ dans $\mathscr{B}$.

9. Soient $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}\right)$ et $G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} x + 3y + 3z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}\right\}$. Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

10. Soient $\mathscr{D}_3(\mathbb{R}) = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \;\middle|\; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\right\}$ et $F = \{D \in \mathscr{D}_n \mid \mathrm{tr}(D) = 0\}$. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathscr{D}_n$.