Correction de l'interrogation 06
Calcul algébrique

1. Définir le coefficient binomial.
   Solution. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$.
$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } k \in [\![0;n]\!] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Donner la somme des premiers entiers, de leurs carrés, de leurs cubes.
   Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2.$$

3. Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Calculer $S_n = \sum_{k=2}^{n+1} \mathrm{e}^{(k+a)^2-k^2}$.
   Solution. On a les égalités entre complexes suivantes :
$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=2}^{n+1} \mathrm{e}^{(k+a)^2-k^2} &= \sum_{k=2}^{n+1} \mathrm{e}^{k^2+2ak+a^2-k^2} \\ &= \sum_{k=2}^{n+1} \mathrm{e}^{2ak+a^2} \\ &= \sum_{k=2}^{n+1} \mathrm{e}^{a^2}\,\mathrm{e}^{2ak} \\ &= \mathrm{e}^{a^2} \sum_{k=2}^{n+1} \left(\mathrm{e}^{2a}\right)^k && \textit{par linéarité de la somme.} \end{aligned}$$
   Puisque $a \neq 0$, on a $\mathrm{e}^{2a} \neq 1$ et l'on reconnait une somme géométrique.
   Méthode 1. Par le changement d'indice $\tilde{k} = k-2$, on a
$$\begin{aligned} S_n &= \mathrm{e}^{a^2} \sum_{\tilde{k}=0}^{n-1} \mathrm{e}^{2a\left(\tilde{k}+2\right)} \\ &= \mathrm{e}^{a^2} \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{2ak}\,\mathrm{e}^{4a} && \textit{car l'indice est muet} \\ &= \mathrm{e}^{a^2+4a}\,\frac{\mathrm{e}^{2an}-1}{\mathrm{e}^{2a}-1} && \textit{car } a \neq 0. \end{aligned}$$
   Conclusion,
$$\boxed{S_n = \mathrm{e}^{a^2+4a}\,\frac{\mathrm{e}^{2an}-1}{\mathrm{e}^{2a}-1}.}$$
   Méthode 2. Par compensation des premiers termes, on a
$$\begin{aligned} S_n &= \mathrm{e}^{a^2}\left(\sum_{k=0}^{n+1}\left(\mathrm{e}^{2a}\right)^k - 1 - \mathrm{e}^{2a}\right) \\ &= \mathrm{e}^{a^2}\left(\frac{\mathrm{e}^{2a(n+2)}-1}{\mathrm{e}^{2a}-1} - 1 - \mathrm{e}^{2a}\right) && \textit{car } a \neq 0 \\ &= \mathrm{e}^{a^2}\,\frac{\mathrm{e}^{2a(n+2)}-1-\mathrm{e}^{2a}+1-\mathrm{e}^{4a}+\mathrm{e}^{2a}}{\mathrm{e}^{2a}-1} \\ &= \mathrm{e}^{a^2}\,\frac{\mathrm{e}^{2a(n+2)}-\mathrm{e}^{4a}}{\mathrm{e}^{2a}-1}. \end{aligned}$$

Est-ce bien le même résultat que précédemment ? En factorisant par e^{4a}, on a

$$S_n = e^{a^2} \frac{e^{2an+4a} - e^{4a}}{e^{2a} - 1} = e^{a+4a} \frac{e^{2an} - 1}{e^{2a} - 1}.$$

Conclusion,

$$\boxed{S_n = e^{a^2+4a} \frac{e^{2an} - 1}{e^{2a} - 1}.}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} 2^{k/2}$.

Solution. Par compensation du premier et dernier terme, on reconnaît un binôme de Newton :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} 2^{k/2} - \binom{n+1}{0} 2^0 - \binom{n+1}{n+1} 2^{\frac{n+1}{2}} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \sqrt{2}^k \times 1^{n+1-k} - 1 - \sqrt{2}^{n+1} \\ &= \left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1} - 1 - \sqrt{2}^{n+1}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{S_n = \left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1} - 1 - \sqrt{2}^{n+1}.}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} (\ln(n+3-k) - \ln(k))$.

Solution. Par linéarité de la somme,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(n+3-k) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k).$$

On effectue l'inversion d'indice $\tilde{k} = n+3-k$ dans la première somme. On obtient

$$S_n = \sum_{\tilde{k}=3}^{n+2} \ln\left(\tilde{k}\right) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k) = \sum_{k=3}^{n+2} \ln(k) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \qquad \textit{car l'indice de sommation est muet.}$$

On extrait alors les termes de bord,

$$S_n = \ln(n+2) + \ln(n+1) + \sum_{k=3}^{n} \ln(k) - \sum_{k=3}^{n} \ln(k) - \ln(2) - \ln(1) = \ln(n+2) + \ln(n+1) - \ln(2).$$

Conclusion,

$$\boxed{S_n = \ln\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right).}$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \binom{n}{k-n} 3^k (-1)^{n-k}$.

Solution. Par le glissement d'indice $\tilde{k} = k-n$ i.e. $k = \tilde{k}+n$, on a

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{\tilde{k}=1}^{n} \binom{n}{\tilde{k}} 3^{\tilde{k}+n} (-1)^{n-\tilde{k}-n} &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k (-1)^{-k} 3^n && \textit{car l'indice de sommation est muet} \\ &= 3^n \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k \frac{1}{(-1)^k} && \textit{par linéarité de la somme} \\ &= 3^n \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{3}{-1}\right)^k \\ &= 3^n \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-3)^k. \end{aligned}$$

En compensant par le premier terme, on reconnaît un binôme de Newton :

$$S_n = 3^n \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-3)^k \times 1^{n-k} - \binom{n}{0} (-3)^0 \right) = 3^n \left((1-3)^n - 1 \right) = 3^n \left((-2)^n - 1 \right)$$

Conclusion,

$$\boxed{S_n = (-6)^n - 3^n.}$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+3j)^2$.

Solution. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}
S_n = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+3j)^2 &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \left(i^2 + 6ij + 9j^2\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} i^2 + 6j \sum_{i=1}^{n} i + 9j^2 \sum_{i=1}^{n} 1 \right) && \textit{par linéarité de la somme} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 6j \frac{n(n+1)}{2} + 9j^2 n \right) \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \sum_{j=1}^{n} 1 + 3n(n+1) \sum_{j=1}^{n} j + 9n \sum_{j=1}^{n} j^2 && \textit{par linéarité de la somme} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} n + 3n(n+1) \frac{n(n+1)}{2} + 9n \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{n^2(n+1)}{6} \left(2n+1 + 9(n+1) + 9(2n+1)\right) \\
&= \frac{n^2(n+1)(29n+19)}{6}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{S_n = \frac{n^2(n+1)(29n+19)}{6}.}$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $S_n = \sum_{0 \leqslant k,l \leqslant n} \binom{n}{k} \cos\left((k+l)\frac{\pi}{3}\right)$.

Solution. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{0 \leqslant k,l \leqslant n} \binom{n}{k} \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{i(k+l)\frac{\pi}{3}}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{0 \leqslant k,l \leqslant n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{i(k+l)\frac{\pi}{3}} \right) && \textit{par la } \mathbb{R}\textit{-linéarité de la partie réelle} \\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{ik\frac{\pi}{3}} \sum_{l=0}^{n} \mathrm{e}^{il\frac{\pi}{3}} \right) && \textit{car les variables sont séparées.}
\end{aligned}$$

Puisque $\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} \neq 1$, on reconnaît une somme géométrique dans la seconde somme et un binôme de Newton dans la première somme :

$$S_n = \mathrm{Re}\left(\left(1 + \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n \frac{1 - \mathrm{e}^{i(n+1)\frac{\pi}{3}}}{1 - \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}} \right).$$

Par factorisation par l'angle moitié,

$$\begin{aligned}
S_n &= \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{i\frac{n\pi}{6}} \left(\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}} + \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}\right)^n \frac{\mathrm{e}^{i(n+1)\frac{\pi}{6}}}{\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}} \frac{\mathrm{e}^{-i(n+1)\frac{\pi}{6}} - \mathrm{e}^{i(n+1)\frac{\pi}{6}}}{\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}} - \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}} \right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{i\frac{n\pi}{3}} \left(2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^n \frac{(-2i)\sin\left((n+1)\frac{\pi}{6}\right)}{(-2i)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)} \right) \\
&= \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) \left(\sqrt{3}\right)^n 2\sin\left((n+1)\frac{\pi}{6}\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{S_n = 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\sin\left((n+1)\frac{\pi}{6}\right)\left(\sqrt{3}\right)^n.}$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{i}{j}$.

Solution. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j-1}\frac{i}{j} &= \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\sum_{i=0}^{j-1} i \\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\frac{(j-1)\,j}{2} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{j-1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} 1 \\ &= \frac{1}{2}\frac{n\,(n+1)}{2} - \frac{1}{2}n \\ &= \frac{n\,(n+1-2)}{4}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{S_n = \frac{n\,(n-1)}{4}.}$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \binom{n}{j}\binom{j}{i}$.

Solution. On a les égalités suivantes entre réels,

$$S_n = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}\binom{n}{j}\binom{j}{i} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i} \qquad \textit{par linéarité de la somme.}$$

On reconnaît alors un binôme de Newton. Ainsi,

$$S_n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(1+1)^j = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}2^j \times 1^{n-j}.$$

On reconnaît à nouveau un binôme de Newton :

$$S_n = (2+1)^n = 3^n.$$

Conclusion,

$$\boxed{S_n = 3^n.}$$